

# 多入力多出力離散システムに対する有色雑音ゲイン関数

小松 信雄

情報科学部 情報知能学科  
(2022年11月29日受理)

The Colored Noise Gain Function of the Multiple Input and Multiple Output  
Discrete-time System

by

Nobuo KOMATSU

Department of Information and Computer Science,  
Faculty of Information Science and Technology

## Abstract

In this study, a method to obtain the colored noise gain function of the MIMO (multiple input and multiple output) discrete-time system is proposed. The colored noise gain function returns the estimation of the covariances of the output signals based on those of the input signals. The input signals were assumed to be white or colored Gaussian noises, and the proposed function was derived from the system parameters in the closed form. Some simulation results of the system with colored noise input reveal the effectiveness of the proposed method.

**キーワード** ; 離散時間システム, 多入力多出力, 有色雑音入力, 共分散, 自己共分散

**Keyword** ; Discrete-time System, MIMO, Colored Noise Input, Covariance, Auto-covariance

## 1 緒論

本論文では、多入力多出力離散システムの有色（白色を含む）雑音信号入力に対する出力の自己共分散（分散を含む）と共分散を求める関数を導出する。さらに、有色雑音信号入力を持つシステムに対するシミュレーションの内容と結果について述べる。

一般に、システムの入力に雑音が入る場合、出力への影響の大きさを知ることは重要である。複数のセンサ入力を持つシステムにおいてあらかじめセンサの誤差を計測しておくことで、システムの出力に現れる誤差の大きさが求められることは、センサの選定、制御方法の検討などに有効となると考えられる。

ところで筆者は、入出力誤差モデルを対象とした、統計学などの分野では変数誤差モデル（errors-in-variables model）と呼ばれるモデルに対して、固有ベクトル法を改良した同定法を提案した [1]。固有ベクトル法は古典的同定法の一種であり、固有ベクトルを用いて誤差の分散からパラメータ推定を行ない、次にパラメータ推定値から誤差分散推定を行なうことを繰り返す同定法などが提案されている [2] [3] [4] [5]。著者が提案した同定法は、新しい誤差分散推定アルゴリズムを用いたパラメータ同定法である。

さらにその同定法を段階的に発展させ、対象とするシステムを広げた同定法を順次発表した [6] [7] [8]。また、白色雑音ゲイン関数を導出し、それを固有ベクトル法のパラメータ推定値から誤差の分散を求める過程に利用して、一入力一出力 (SISO) システムに対するパラメータ同定法を提案した [9]。一入力一出力システムに対する白色ゲイン関数とは、ある SISO システムの入力が白色ガウス雑音信号であるとき、出力の分散の大きさを入力の分散からシステムパラメータを用いて計算する関数である。

なお雑音ゲイン関数は、ARMA（autoregressive moving average）モデルに対して信号処理その他の分野で利用されている自己共分散関数 ACF（autocovariance function）に対応する。ACF の計算方法としては、差分方程式（difference equation）を解くことにより求める方法が知られている [10]。またさらに、伝達関数の極を用いた、閉じた形での関数が示されているが、システムは重極を持たないと仮定されている [11]。ただし、いずれの ACF

の計算でも、雑音信号入力については白色であると仮定している。

そのような関数として著者は、雑音信号入力が有色の場合の一入力一出力システムに対する雑音ゲイン関数（有色雑音ゲイン関数）を導出した。そして、それを用いた同定法を提案した [12]。有色雑音ゲイン関数はシステムの雑音信号入力の自己共分散からシステムの出力の自己共分散を求める関数である。さらに、システムが重極を持っている場合においても適用可能な閉じた形式での関数を導出した [13]。

本論文では、多入力多出力 (MIMO) システムに対する有色雑音ゲイン関数を導出し、MIMO システムの同定問題などへの応用を可能とする。なお、対象とする制御システムは、その全てのサブシステムの伝達関数が厳密にプロパーであり、直達項（入力の定数倍となる項）を含まないと仮定する。

まず対象とする多入力多出力システムの構造について述べる。そして、各サブシステムの伝達関数を部分分数展開し、極および定数係数をパラメータとして求める。次に、そのパラメータを用いて各出力の値を入力値で表す、そこから出力の自己共分散と共分散を入力値の自己共分散と共分散で表す式を求める。さらに、その式に含まれる無限級数について収束値を求める。そこから有色雑音信号入力に対する出力の自己共分散と共分散を求める関数を導出する。また、ある信号に対して自己共分散と共分散で構成されるベクトル（共分散ベクトルとする）を定義する。そして、入力の共分散ベクトルと有色雑音ゲイン関数で構成される行列の積によって、出力の共分散ベクトルを求める式を導出する。

さらに、厳密にプロパーな伝達関数で構成される 2 入力 2 出力システムを対象として行なったシミュレーションについて述べる。その結果より、ある程度大きなサンプリング数であれば、提案する関数により計算した出力の自己共分散と共分散が、シミュレーションで求められたものとほぼ一致し、本論文で提案する関数が有効であることを示す。

## 2 対象システム

本論文において雑音ゲイン関数を求める対象となるシステムは図 1 に示されるような、有色雑音  $u_{i,t}(i = 1, \dots, i_M)$  を入力とし  $y_{j,t}(j = 1, \dots, j_M)$  を出力とする MIMO システムである。そして伝達

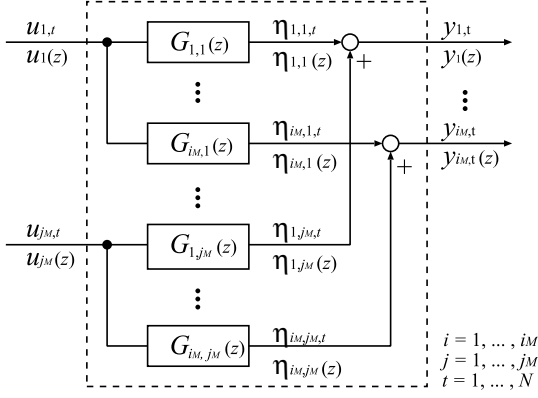


Fig. 1 The MIMO system with colored input

関数  $G_{i,j}(z)$  は既知であるとする。各  $G_{i,j}(z)$  の要素の出力を  $\eta_{i,j,t}$  とする。従って出力  $y_{i,t}$  は、

$$y_{i,t} = \sum_{j=1}^{jM} \eta_{i,j,t} \quad (1)$$

となる。

また  $t \leq 0$  に対して  $y_{i,t}, u_{j,t}$  は 0 とする。さらに  $y_{i,t}, u_{j,t}, \eta_{i,j,t}$  を  $z$  変換したものをそれぞれ  $y_i(z), u_j(z), \eta_{i,j}(z)$  とすると、

$$y_i(z) = \sum_{t=0}^{\infty} y_{i,t} z^{-t} = \sum_{j=1}^{jM} \eta_{i,j}(z) \quad (2)$$

$$\eta_{i,j}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \eta_{i,j,t} z^{-t} = G_{i,j}(z) u_j(z) \quad (3)$$

となる。

さらに  $G_{i,j}(z)$  は安定かつ厳密にプロパーな伝達関数とする。そして  $G_{i,j}(z)$  の次数  $n_{i,j}$  は既知とし、相異なる  $m_{i,j}$  個の極  $z_{i,j,1}, \dots, z_{i,j,m_{i,j}}$  があり、それぞれの重複度が  $w_{i,j,1}, \dots, w_{i,j,m_{i,j}}$  であるとする。

従って、

$$n_{i,j} = \sum_{r=1}^{m_{i,j}} w_{i,j,r} \quad (4)$$

$$G_{i,j}(z) = \frac{b_{i,j,1} z^{-1} + \dots + b_{i,j,n_{i,j}} z^{-n_{i,j}}}{1 + a_{i,j,1} z^{-1} + \dots + a_{i,j,n_{i,j}} z^{-n_{i,j}}} \quad (5)$$

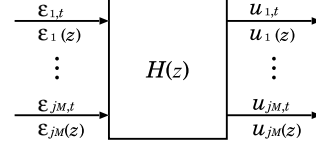
$$= \sum_{r=1}^{m_{i,j}} \sum_{s=1}^{w_{i,j,r}} \frac{v_{i,j,r,s} z^{-s}}{(1 - z_{i,j,r} z^{-1})^s} \quad (6)$$

ただし、

$$|z_{i,j,r}| < 1 \quad (r = 1, \dots, m_{i,j}) \quad (7)$$

とする。

また図 2 に示すように対象システムの入力  $u_{j,t}$  は未知の伝達関数行列  $H(z)$  を持つ有色雑音生成システムの入力とする。また  $H(z)$  は図 1 と同様の多入力多出力システムであり、そのシステムには未知の分散  $\sigma_{\epsilon_j}^2$  の白色ガウス雑音  $\epsilon_{j,t}$  が入力されているとする。

Fig. 2 The noise signal generator of  $u_{j,t}$ 

遅延時間（ディレイタイム）を  $q$  として  $u_{j_1,t}$  と  $u_{j_2,t-q}$  の共分散を  $\gamma_{u,q,j_1,j_2}$  とする。同様に遅延時間を  $d$  として  $y_{i_1,t}$  と  $y_{i_2,t-d}$  の共分散を  $\gamma_{y,d,i_1,i_2}$  とする。なお、

$$\gamma_{u,-q,j_1,j_2} = \gamma_{u,q,j_2,j_1} \quad (8)$$

$$\gamma_{y,-d,i_1,i_2} = \gamma_{y,d,i_2,i_1} \quad (9)$$

が成り立つ。また  $u_{j,t}$  の遅延時間  $q$  での自己共分散は  $\gamma_{u,q,j,j}$  となり、 $y_{i,t}$  の遅延時間  $d$  での自己共分散は  $\gamma_{y,d,i,i}$  となる。さらに  $\gamma_{u,0,j,j}$  は  $u_j$  の分散  $\sigma_{u_j}^2$  であり、 $\gamma_{y,0,i,i}$  は  $y_i$  の分散  $\sigma_{y_i}^2$  である。

ここで、ある  $t$  の関数  $x_t$  に対して  $\bar{x}_t$  は  $x_t$  の  $t$  についての平均を表すものとする。例えば十分大きな  $N$  に対して、

$$\bar{x}_t = (N+1)^{-1} \sum_{t=0}^N x_t \quad (10)$$

とすると、

$$\overline{u_{j_1,t} u_{j_2,t-q}} = \gamma_{u,q,j_1,j_2} (: \text{known}, q = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

$$\overline{y_{i_1,t} y_{i_2,t-d}} = \gamma_{y,d,i_1,i_2} (: \text{unknown}, d = 0, 1, \dots) \quad (12)$$

となる。なお  $\gamma_{u,q,j_1,j_2}$  は既知であり、 $\gamma_{y,d,i_1,i_2}$  は未知である。

またエルゴード性が成り立ち、確率平均と時間平均が一致すると仮定する。

### 3 有色雑音ゲイン関数の計算方法

#### 3.1 $y_{i,t}$ を $u_{j,t}$ で表す方法

ここでは、出力  $y_{i,t}$  を入力  $u_{j,t}$  で表す。

まず  $|z| < 1$  のとき,

$$(1-z)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} z^t \quad (13)$$

となる.

ここで係数  $\kappa_{s,k}$  を用いて,

$$(1-z)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z^k \quad (14)$$

とすると (14) 式の両辺の  $z$  についての  $t$  階微分を求め  $z=0$  とすることにより,

$$\kappa_{s,k} = \frac{1}{k!} \prod_{\ell=0}^{k-1} (s+\ell) \quad (15)$$

となることが分かる. ただし総乗の記号について,

$$\prod_{\ell=k_2}^{k_1} x_{\ell} = 1 \quad (k_1 < k_2) \quad (16)$$

である.

なお (15) 式より,

$$\kappa_{s,k} = \frac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{(s-1)!} \prod_{\ell=1}^{s-1} (k+\ell) \quad (18)$$

と表すことができる.

次に (14) 式の  $z$  を  $z_{i,j,r} z^{-1}$  とすると,

$$(1 - z_{i,j,r} z^{-1})^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z_{i,j,r}^k z^{-k} \quad (19)$$

となり (6) 式 (19) 式より,

$$G_{i,j}(z) = \sum_{r=1}^{m_{i,j}} \sum_{s=1}^{w_{i,j,r}} v_{i,j,r,s} z^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z_{i,j,r}^k z^{-k} \quad (20)$$

が得られる.

ところで,

$$u_j(z) = \sum_{t=0}^{\infty} u_{j,t} z^{-t} \quad (21)$$

であるので, (3) 式に (20) 式 (21) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}(z) &= \sum_{r=1}^{m_{i,j}} \sum_{i=1}^{w_{i,j,r}} v_{i,j,r,s} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z_{i,j,r}^k \sum_{t=0}^{\infty} u_{j,t} z^{-(t+s+k)} \\ & \quad (22) \end{aligned}$$

となる.

また  $t$  が負の場合  $u_{j,t}$  は 0 であり  $s \geq 1, k \geq 0$  より,

$$\sum_{t=0}^{\infty} u_{j,t} z^{-(t+s+k)} = \sum_{t=0}^{\infty} u_{j,t-s-k} z^{-t} \quad (23)$$

となる. つまり, (22) 式 (23) 式より,

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}(z) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \sum_{r=1}^{m_{i,j}} \sum_{i=1}^{w_{i,j,r}} v_{i,j,r,s} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z_{i,j,r}^k u_{j,t-s-k} \right) z^{-t} \\ & \quad (24) \end{aligned}$$

となる.

従って,

$$\eta_{i,j,t} = \sum_{r=1}^{m_{i,j}} \sum_{i=1}^{w_{i,j,r}} v_{i,j,r,s} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z_{i,j,r}^k u_{j,t-s-k} \quad (25)$$

となる. また (1) 式より,

$$y_{i,t} = \sum_{j=1}^{j_M} \sum_{r=1}^{m_{i,j}} \sum_{i=1}^{w_{i,j,r}} v_{i,j,r,s} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s,k} z_{i,j,r}^k u_{j,t-s-k} \quad (26)$$

となり,  $y_{i,t}$  は  $u_{j,t}$  で表される.

### 3.2 $\gamma_{y,d}$ の式

ここでは遅延時間  $d$  での  $y_{i_1,t}$  と  $y_{i_2,t}$  の共分散  $\gamma_{y,d,i_1,i_2}$  を求める方法について述べる.

まず  $y_{i_1,t}$  と  $y_{i_2,t-d}$  の積を求めると (26) 式より,

$$\begin{aligned} y_{i_1,t} y_{i_2,t-d} &= \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} X_t \\ & \quad (27) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} X_t &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1,k} z_{i_1,j_1,r_1}^k u_{j_1,t-s_1-k} \right) \\ &\quad \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_2,k} z_{i_2,j_2,r_2}^k u_{j_2,t-d-s_2-k} \right) \quad (28) \end{aligned}$$

となる.

従って,

$$\begin{aligned} \gamma_{y,d,i_1,i_2} &= \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} \overline{X_t} \\ & \quad (29) \end{aligned}$$

となる。なお以下では表記を省略し、

$$z_1 = z_{i_1, j_1, r_1} \quad (30)$$

$$z_2 = z_{i_2, j_2, r_2} \quad (31)$$

とする。

### 3.3 $f_{\alpha, \beta}(p)$ を用いた $\overline{X}_t$ の式

次に  $\overline{X}_t$  を  $\gamma_{u, q, j_1, j_2}$  で表す方法について述べる。  
まず (28) 式より、

$$\begin{aligned} X_t = & \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1, k} \kappa_{s_2, k} z_1^k z_2^k \cdot u_{j_1, t-s_1-k} u_{j_2, t-d-s_2-k} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1, k} \kappa_{s_2, k+p} z_1^k z_2^{k+p} \\ & \cdot u_{j_1, t-s_1-k} u_{j_2, t-d-s_2-k-p} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1, k+p} \kappa_{s_2, k} z_1^{k+p} z_2^k \\ & \cdot u_{j_1, t-s_1-k-p} u_{j_2, t-d-s_2-k} \end{aligned} \quad (32)$$

従って、

$$\begin{aligned} \overline{X}_t = & \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1, k} \kappa_{s_2, k} z_1^k z_2^k \cdot \gamma_{u, d-s_1+s_2, j_1, j_2} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1, k} \kappa_{s_2, k+p} z_1^k z_2^{k+p} \\ & \cdot \gamma_{u, d+p-s_1+s_2, j_1, j_2} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_1, k+p} \kappa_{s_2, k} z_1^{k+p} z_2^k \\ & \cdot \gamma_{u, d-p-s_1+s_2, j_1, j_2} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。

ここで、

$$d_0 = d - s_1 + s_2 \quad (34)$$

とし、さらに  $\alpha, \beta$  を 1, 2 または 2, 1 として関数  $f_{\alpha, \beta}(p)$  を、

$$f_{\alpha, \beta}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{s_{\alpha}, k} \kappa_{s_{\beta}, k+p} z_{\alpha}^k z_{\beta}^{k+p} \quad (35)$$

とすると (33) 式より、

$$\begin{aligned} \overline{X}_t = & f_{1,2}(0) \gamma_{u, d_0, j_1, j_2} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} f_{1,2}(p) \gamma_{u, d_0+p, j_1, j_2} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} f_{2,1}(p) \gamma_{u, d_0-p, j_1, j_2} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。

### 3.4 関数 $f_{\alpha, \beta}(p)$ の収束値

$f_{\alpha, \beta}(p)$  は (35) 式に示されるように  $k$  についての無限級数である。その収束値を求めるため  $\kappa_{s_{\alpha}, k} \kappa_{s_{\beta}, k+p}$  に含まれる 2 つの  $k$  を含む項の総乗をまとめて 1 つにする。

そのためまず、

$$g_s(k) = \prod_{\ell=1}^{s-1} (k + \ell) \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (37)$$

と定義する。なお  $s$  が 1 のとき  $g_s(k)$  は 1 であり、 $s$  が 2 以上のとき  $g_s(k)$  は  $k$  の  $(s-1)$  次式となる。  
ところで (18) 式 (37) 式より、

$$\begin{aligned} & \kappa_{s_{\alpha}, k} \kappa_{s_{\beta}, k+p} \\ = & \frac{1}{(s_{\alpha}-1)!(s_{\beta}-1)!} \prod_{\ell=1}^{s_{\alpha}-1} (k + \ell) \prod_{\ell=1}^{s_{\beta}-1} (k + p + \ell) \end{aligned} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{(s_{\alpha}-1)!(s_{\beta}-1)!} g_{s_{\alpha}}(k) g_{s_{\beta}}(k+p) \quad (39)$$

となる。

さらに付録より、

$$c_{\mu, p, s_{\alpha}, s_{\beta}} = \sum_{h=0}^{\mu} \frac{(-1)^h}{(\mu-h)! h!} \prod_{\ell=1}^{s_{\beta}-1} (p - s_{\alpha} - h + \ell) \quad (40)$$

とすると、

$$g_{s_{\beta}}(k+p) = \sum_{\mu=0}^{s_{\beta}-1} c_{\mu, p, s_{\alpha}, s_{\beta}} \prod_{j=0}^{\mu-1} (k + s_{\alpha} + j) \quad (41)$$

となる [13]。従って (38) 式の 2 つの総乗の積は、

$$\begin{aligned} & \prod_{\ell=1}^{s_{\alpha}-1} (k + \ell) \prod_{\ell=1}^{s_{\beta}-1} (k + p + \ell) \\ = & \prod_{\ell=1}^{s_{\alpha}-1} (k + \ell) \left\{ \sum_{\mu=0}^{s_{\beta}-1} c_{\mu, p, s_{\alpha}, s_{\beta}} \prod_{j=0}^{\mu-1} (k + s_{\alpha} + j) \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{s_{\beta}-1} c_{\mu, p, s_{\alpha}, s_{\beta}} \prod_{\ell=1}^{s_{\alpha}+\mu-1} (k + \ell) \quad (43)$$

となり、1 つの総乗に係数を掛けた項の総和にすることができる。

従って (38) 式 (43) 式より、

$$\kappa_{s_{\alpha}, k} \kappa_{s_{\beta}, k+p}$$

$$= \frac{1}{(s_\alpha - 1)!(s_\beta - 1)!} \sum_{\mu=0}^{s_\beta-1} c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \prod_{\ell=1}^{s_\alpha+\mu-1} (k + \ell) \quad (44)$$

となり (35) 式の関数  $f_{\alpha,\beta}(p)$  は,

$$\begin{aligned} & f_{\alpha,\beta}(p) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s_\alpha - 1)!(s_\beta - 1)!} \\ & \cdot \sum_{\mu=0}^{s_\beta-1} c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \prod_{\ell=1}^{s_\alpha+\mu-1} (k + \ell) z_\alpha^k z_\beta^{k+p} \quad (45) \\ &= \frac{z_\beta^p}{(s_\alpha - 1)!(s_\beta - 1)!} \\ & \cdot \sum_{\mu=0}^{s_\beta-1} c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + s_\alpha + \mu - 1)!}{k!} (z_\alpha z_\beta)^k \quad (46) \end{aligned}$$

となる。ところで (14) 式 (17) 式より,

$$(1 - z)^{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + i - 1)!}{k!(i - 1)!} z^k \quad (47)$$

$$(i - 1)!(1 - z)^{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + i - 1)!}{k!} z^k \quad (48)$$

となる。そこで (48) 式の  $z$  を  $z_\alpha z_\beta$  とし,  $i$  を  $s_\alpha + \mu$  とすると,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + s_\alpha + \mu - 1)!}{k!} (z_\alpha z_\beta)^k \\ &= (s_\alpha + \mu - 1)!(1 - z_\alpha z_\beta)^{-(s_\alpha + \mu)} \quad (49) \end{aligned}$$

が得られる。

従って (46) 式 (49) 式より,

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta}(p) &= \frac{z_\beta^p}{(s_\alpha - 1)!(s_\beta - 1)!} \cdot \sum_{\mu=0}^{s_\beta-1} c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \\ & \cdot (s_\alpha + \mu - 1)!(1 - z_\alpha z_\beta)^{-(s_\alpha + \mu)} \quad (50) \end{aligned}$$

となり,  $f_{\alpha,\beta}(p)$  が無限級数のない形で求められる。

### 3.5 有色雑音ゲイン関数 $W_{d,q}$ と有色雑音ゲイン関数行列 $W(G)$

ここでは, 自己共分散と分散で構成されるベクトル (共分散ベクトル) を定義し, 入力 of 共分散ベクトルから出力の共分散ベクトルを求める式を導出する。

まず (29) 式 (36) 式より,

$$\begin{aligned} & \gamma_{y,d,i_1,i_2} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} \\ & v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} f_{1,2}(p) \gamma_{u,d_0+p,j_1,j_2} \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} \\ & v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} f_{2,1}(p) \gamma_{u,d_0-p,j_1,j_2} \quad (51) \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} & \gamma_{y,d,i_1,i_2} \\ &= \sum_{q=d_0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} \\ & v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} f_{1,2}(q - d_0) \gamma_{u,q,j_1,j_2} \\ &+ \sum_{q=-\infty}^{d_0-1} \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} \\ & v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} f_{2,1}(d_0 - q) \gamma_{u,q,j_1,j_2} \quad (52) \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} & W_{d,i_1,i_2,q,j_1,j_2} \\ &= \sum_{r_1=1}^{m_{i_1,j_1}} \sum_{r_2=1}^{m_{i_2,j_2}} \sum_{s_1=1}^{w_{i_1,j_1,r_1}} \sum_{s_2=1}^{w_{i_2,j_2,r_2}} \\ & v_{i_1,j_1,r_1,s_1} v_{i_2,j_2,r_2,s_2} f_0(q - d_0) \quad (53) \end{aligned}$$

ただし,

$$f_0(p) = \begin{cases} f_{1,2}(p) & (p \geq 0) \\ f_{2,1}(-p) & (p < 0) \end{cases} \quad (54)$$

とすると,

$$\gamma_{y,d,i_1,i_2} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{j_M} \sum_{j_2=1}^{j_M} W_{d,i_1,i_2,q,j_1,j_2} \gamma_{u,q,j_1,j_2} \quad (55)$$

となる。

ここで  $W_{d,i_1,i_2,q,j_1,j_2}$  を求める方法をまとめると次のようになる。

1:  $W_{d,i_1,i_2,q,j_1,j_2}$  は  $f_{1,2}(p)$ ,  $f_{2,1}(p)$  を使って (53) 式 (54) 式で求められる。

2:  $f_{1,2}(p)$ ,  $f_{2,1}(p)$  は  $c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta}$  を使って (50) 式で求められる。

3:  $c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta}$  は (40) 式で求められる。

次に,

$$\gamma_u = [\dots, \gamma_{u,-1}^T, \gamma_{u,0}^T, \gamma_{u,1}^T, \dots]^T \quad (56)$$

$$\gamma_y = [\dots, \gamma_{y,-1}^T, \gamma_{y,0}^T, \gamma_{y,1}^T, \dots]^T \quad (57)$$

$$\gamma_{u,q} = [\gamma_{u,q,1,1}, \dots, \gamma_{u,q,1,j_M}, \dots, \gamma_{u,q,j_M,j_M}]^T \quad (58)$$

$$\gamma_{y,d} = [\gamma_{y,d,1,1}, \dots, \gamma_{y,d,1,i_M}, \dots, \gamma_{y,d,i_M,i_M}]^T \quad (59)$$

とすると,

$$\gamma_y = \mathbf{W} \gamma_u \quad (60)$$

$$\mathbf{W} = [W_{D,Q}] \quad (61)$$

$$W_{D,Q} = W_{d,i_1,i_2,q,j_1,j_2} \quad (62)$$

ただし,

$$D = d \cdot i_M^2 + i_1 \cdot i_M + i_2 \quad (63)$$

$$Q = q \cdot j_M^2 + j_1 \cdot j_M + j_2 \quad (64)$$

となる. ここで (56) 式 (57) 式 (58) 式 (59) 式で定義される  $\gamma_u$ ,  $\gamma_y$  をそれぞれ入力信号, 出力信号の共分散ベクトルと呼ぶこととする. また,  $W_{D,Q}$  を多入力多出力有色雑音ゲイン関数 (M-NGF) と呼び,  $\mathbf{W}$  を有色雑音ゲイン関数行列と呼ぶこととする.

以上より, 入力の共分散ベクトルと  $\mathbf{W}$  より, 出力の共分散ベクトルが求められることが示された. 従って  $\gamma_y$  より出力の自己共分散と共分散が求められる.

ところで  $\gamma_{y,d,i_1,i_2}$  を求めるには  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  全てに対して  $\gamma_{u,q,j_1,j_2}$  が必要となる. しかし, 通常それは困難であり  $q$  は制限される. また  $q$  の制限によって  $d$  についても制限が生じることが考えられる. つまり, 例えば  $d, q$  の最大値を  $d_M, q_M$  として,

$$-d_M \leq d \leq d_M \quad (d_M > 0) \quad (65)$$

$$-q_M \leq q \leq q_M \quad (q_M > 0) \quad (66)$$

とし, それ以上の項の計算を打ち切る必要がある. そのため  $\gamma_{y,d,i_1,i_2}$  の計算に誤差が生じる. ただし  $q_M$  をある程度大きくすることによって, 打ち切りによる誤差を無視できるほど小さくすることが可能と考えられる.

## 4 有色雑音信号入力に対する出力のシミュレーション

提案する M-NGF の計算について, 図 1 で  $i_M = j_M = 2$  とした 2 入力 2 出力システムに対してシミュレーションを行なった. また, いくつかのシミュレーションを行なって (65) 式 (66) 式の  $d_M, q_M$  を  $d_M = q_M = 10$  とした.

伝達関数行列は,

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(z) & G_{1,2}(z) \\ G_{2,1}(z) & G_{2,2}(z) \end{bmatrix} \quad (67)$$

であり,

$$G_{1,1}(z) = \frac{1.0z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (68)$$

$$G_{1,2}(z) = \frac{-1.4z^{-1} - 0.7z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (69)$$

$$G_{2,1}(z) = \frac{1.0z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (70)$$

$$G_{2,2}(z) = \frac{-1.4z^{-1} - 0.7z^{-2}}{1 + 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.48z^{-2}} \quad (71)$$

とした. このとき対象システム  $\mathbf{G}(z)$  の  $i = 1, 2; j = 1, 2$  に対するサブシステム  $G_{i,j}(z)$  の次数  $n (= n_{i,j})$ , 極の数  $m (= m_{i,j})$ , 極の番号  $r = 1, \dots, m_{i,j}$ , 極  $z_{i,j,r}$  の実部  $Re[z_{i,j,r}]$ , 虚部  $Im[z_{i,j,r}]$  および重複度  $w_{i,j,r}$  は表 1 のようになる. また  $v_{i,j,r,s}$  については表 2 のようになる.

Table 1  $z_{i,j,r}$  of  $G_{i,j}(z)$

$i$	$j$	$n$	$m$	$r$	$Re[z_{i,j,r}]$	$Im[z_{i,j,r}]$	$w_{i,j,r}$
1	1	2	2	1	$0.4\sqrt{3}$	0.4	1
				2	$0.4\sqrt{3}$	-0.4	1
1	2	2	2	1	0.4	$0.4\sqrt{3}$	1
				2	0.4	$-0.4\sqrt{3}$	1
2	1	2	2	1	-0.4	$0.4\sqrt{3}$	1
				2	-0.4	$-0.4\sqrt{3}$	1
2	2	2	1	1	$-0.4\sqrt{3}$	0	2

また有色雑音信号入力生成システムの伝達関数行列を,

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(z) & H_{1,2}(z) \\ H_{2,1}(z) & H_{2,2}(z) \end{bmatrix} \quad (72)$$

ただし,

$$H_{1,1}(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.1z^{-2}} \quad (73)$$

Table 2  $v_{i,j,r,s}$  of  $G_{i,j}(z)$ 

$i$	$j$	$r$	$s$	$Re[v_{i,j,r,s}]$	$Im[v_{i,j,r,s}]$
1	1	1	1	0.5	$-0.625 - 0.5\sqrt{3}$
		2	1	0.5	$0.625 + 0.5\sqrt{3}$
1	2	1	1	$-0.7$	$0.525\sqrt{3}$
		2	1	$-0.7$	$-0.525\sqrt{3}$
2	1	1	1	0.5	$-24^{-1}\sqrt{3}$
		2	1	0.5	$24^{-1}\sqrt{3}$
2	2	1	1	$-1.4$	0
		2	1	$-0.7 + 0.56\sqrt{3}$	0

$$H_{1,2}(z) = \frac{1 + 0.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} + 0.2z^{-2}} \quad (74)$$

$$H_{2,1}(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.1z^{-2}} \quad (75)$$

$$H_{2,2}(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} + 0.2z^{-2}} \quad (76)$$

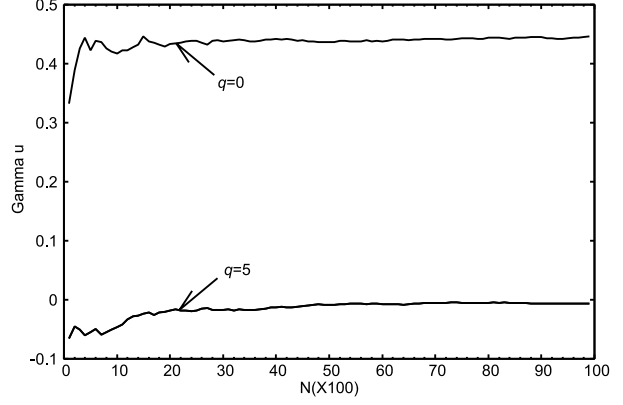
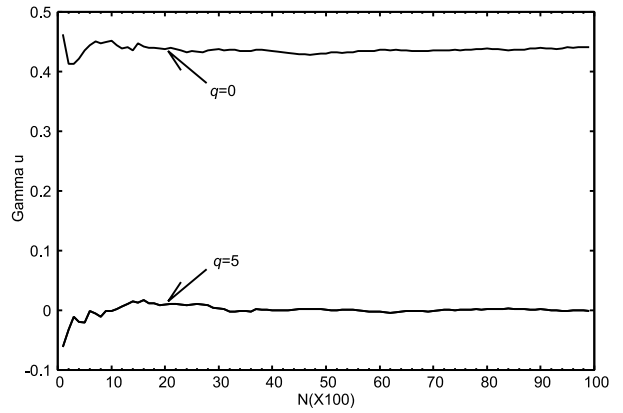
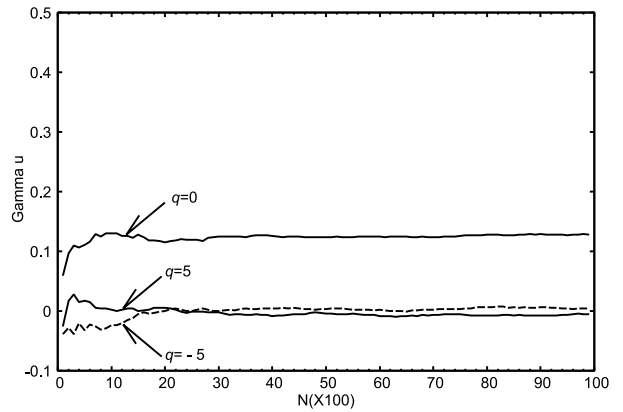
とした．また図 2 の  $\epsilon_j$  はそれぞれ独立した分散  $\sigma^2 = 1$  の白色正規雑音から生成した．

$\epsilon_j$  を入力として  $\mathbf{H}(z)$  によって雑音信号入力  $u_j (j = 1, 2)$  を生成し，シミュレーション時間  $N \leq 10000$  での自己共分散  $\gamma_{u,q,1,1}$ ,  $\gamma_{u,q,2,2}$ ，および共分散  $\gamma_{u,q,1,2}$  を求めた．そして雑音信号  $u_j (j = 1, 2)$  を入力として  $\mathbf{G}(z)$  によって雑音信号出力  $y_i (i = 1, 2)$  を生成することによって，シミュレーション時間  $N$  での自己共分散  $\gamma_{y,d,1,1}$ ,  $\gamma_{y,d,2,2}$  および共分散  $\gamma_{y,d,1,2}$  を求め，シミュレーションによる結果を得た．

さらに伝達関数  $G_{i,j}(z)$  のパラメータから有色雑音ゲイン関数行列  $\mathbf{W}$  を求め，シミュレーション時間  $N$  で求められた  $\gamma_{u,q,1,1}$ ,  $\gamma_{u,q,2,2}$ ,  $\gamma_{u,q,1,2}$  から入力の共分散ベクトル  $\gamma_u$  を構成し，(60) 式で出力の共分散ベクトル  $\gamma_y$  を求め， $\gamma_{y,d,1,1}$ ,  $\gamma_{y,d,2,2}$ ,  $\gamma_{y,d,1,2}$  の計算結果を得た．

まず遅延時間  $q = 0, 5$  における  $u_j (j = 1, 2)$  の自己共分散  $\gamma_{u,q,1,1}$ ,  $\gamma_{u,q,2,2}$  を 100 個毎にプロットしたものを図 3, 図 4 に示す．また遅延時間  $q = -5, 0, 5$  における  $u_j (j = 1, 2)$  の共分散  $\gamma_{u,q,1,2}$  を図 5 に示す．

次にシミュレーション結果（図中で sim と表記）および M-NGF による計算結果（図中で M-NGF と表記）について，遅延時間  $d = 0, 5$  における  $y_i (i = 1, 2)$  の自己共分散  $\gamma_{y,d,1,1}$ ,  $\gamma_{y,d,2,2}$  を図 6, 図 7 に示す．また同様に，遅延時間  $d = 0, 5$  における  $y_i (i = 1, 2)$  の共分散  $\gamma_{y,d,1,2}$  を図 8 に示す．

Fig. 3 Autocovariances  $\gamma_{u,q,1,1}$  ( $q = 0, 5$ )Fig. 4 Autocovariances  $\gamma_{u,q,2,2}$  ( $q = 0, 5$ )Fig. 5 Covariances  $\gamma_{u,q,1,2}$  ( $q = -5, 0, 5$ )

## 5 考察

まず有色雑音信号入力  $u_q$  についての自己共分散と共分散の値をプロットした図 3, 図 4, 図 5 について考える．



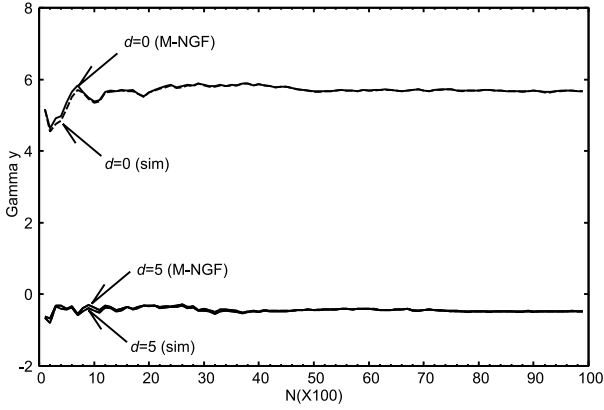
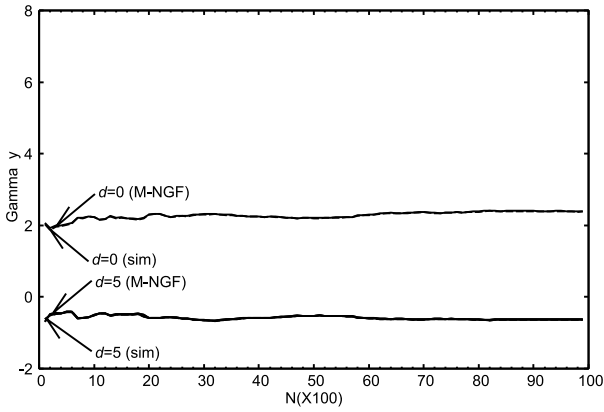
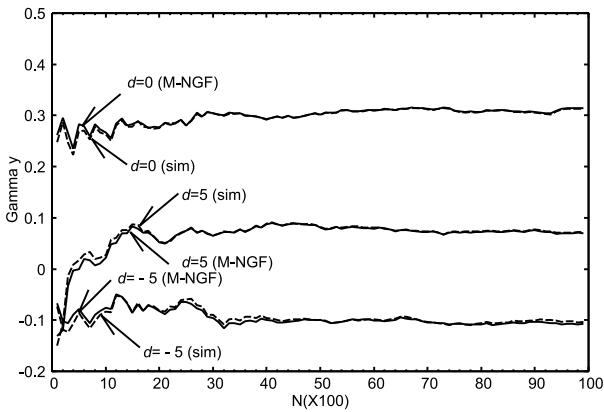
Fig. 6 Autocovariances  $\gamma_{y,d,1,1}$  ( $d = 0, 5$ )Fig. 7 Autocovariances  $\gamma_{y,d,2,2}$  ( $d = 0, 5$ )Fig. 8 Covariances  $\gamma_{y,d,1,2}$  ( $d = -5, 0, 5$ )

図3の  $q = 0$  の場合は  $\gamma_{u,0,1,1}$ , つまり  $u_1$  の分散  $\sigma_{u_1}^2$  は  $N > 4000$  でほぼ一定となっていることが分かる。また  $q = 5$  の場合 ( $q = -5$  と同等) は遅延時間5での自己共分散になり,  $N > 4000$  ではほぼ一定となっていることが分かる。次に図4

は  $u_2$  に関する分散, 自己共分散であるが図3と同様に  $N > 4000$  ではほぼ一定となっていることが分かる。そして図5により  $u_1$  と  $u_2$  の共分散が  $N > 4000$  でほぼ一定となっていることが分かる。

次に出力  $y_1$ ,  $y_2$  の自己共分散と共分散の値について, シミュレーション結果 (sim) と本論文で提案する方法を用いた計算結果 (M-NGF) を重ねてプロットした図6, 図7, 図8について考える。

図6において  $d = 0$  の場合は  $\gamma_{y,0,1,1}$ , つまり  $y_1$  の分散  $\sigma_{y_1}^2$  であり,  $d = 5$  の場合は遅延時間5での  $y_1$  の自己共分散である。どちらの場合も sim と M-NGF が  $N > 1000$  でよく一致していることが分かる。次に図7において,  $d = 0$  の場合は  $\gamma_{y,0,2,2}$  つまり  $y_2$  の分散  $\sigma_{y_2}^2$  であり,  $d = 5$  の場合は遅延時間5での  $y_2$  の自己共分散である。どちらの場合も sim と M-NGF がよく一致していることが分かる。そして図8は  $y_1$ ,  $y_2$  の共分散の値であるが,  $d = 0$  の場合は  $N > 1000$  で,  $d = 5$  の場合は  $N > 2000$  で, さらに  $d = -5$  の場合は  $N > 5000$  でほぼ一致していることが分かる。

以上から, 白色正規雑音から生成された有色雑音信号の自己共分散と共分散が  $N > 4000$  でほぼ一定値に収束していることが分かり, また  $d = -5, 0, 5$  の場合について  $N > 5000$  で  $y_1$ ,  $y_2$  の自己共分散と共分散の値は, sim と M-NGF で一致していることが分かる。

## 6 結論

本論文では, 多入力多出力 (MIMO) システムに対して, 有色雑音の入力に対する出力の自己共分散と共分散を求める関数を導出した。また有色雑音を入力とするシステムに対するシミュレーションを行なった結果について述べた。シミュレーションおよび M-NGF を用いた計算による結果が一致していることが分かった。その結果, 本提案方法によって有色雑音の入力に対する出力の自己共分散と共分散が求められる事が確認できた。

しかし, 入力信号および出力信号それぞれの自己共分散と共分散における遅延時間の最大値  $q_M$ ,  $d_M$  の決定方法について課題が残っている。この問題については, 対象とする伝達関数の特性, 次数および雑音信号の生成過程の特性や大きさなどによって,  $q_M$ ,  $d_M$  が異なると予想され, 今後の検討が必要であると考えられる。

## 参考文献

- [1] 小松：入出力誤差分散推定を用いた一入力一出力システムのパラメータ同定アルゴリズム, システム制御情報学会論文誌, Vol. 27, No.5, pp.216-229 (2014)
- [2] S. Beghelli, R.P. Guidorzi, and U. Soverini: The Frisch scheme in dynamic system identification, Automatica, Vol.26, pp.171-176 (1990)
- [3] R. Diversi, R. Guidorzi, and U. Soverini: A new criterion in EIV identification and filtering applications, In 13th IFAC Symposium on System Identification (2003)
- [4] 和田：固有ベクトル法によるシステム同定について, システム／制御／情報, Vol. 51, No.1, pp.34-36 (2007)
- [5] T. Söderström: Errors-in-varialbes models in system identification, Automatica, Vol.43, pp.939-958 (2007)
- [6] 小松：入出力誤差分散推定を用いた多入力一出力システムのパラメータ同定法, システム制御情報学会論文誌, Vol. 28, No.7, pp.310-319 (2015)
- [7] 小松：入出力誤差分散推定を用いた多入力多出力システムのパラメータ同定法, システム制御情報学会論文誌, Vol. 29, No.8, pp.362-371 (2016)
- [8] 小松：有色出力雑音を有する一入力一出力システムに対する固有ベクトル法を用いたパラメータ同定法, システム制御情報学会論文誌, Vol. 33, No.3, pp.95-103 (2020)
- [9] 小松：白色雑音ゲイン関数を用いた一入力一出力システムに対するパラメータ同定法, システム制御情報学会論文誌, Vol. 31, No.9, pp.336-345 (2018)
- [10] Peter J. Brockwell, Richard A. Davis: Time series : theory and methods 2nd ed, Springer-Verloag (1991).
- [11] M. Karanasos: A New Method for Obtaining the Autocovariance of an ARMA Model: An

Exact Form Solution. Econometric Theory, 14(5), pp.622-640 (1998)

- [12] 小松：有色出力雑音を有する一入力一出力システムに対する雑音ゲイン関数を用いたパラメータ同定法, システム制御情報学会論文誌, Vol. 34, No.2, pp.29-36 (2021)
- [13] 小松：一入力一出力離散システムに対する有色雑音ゲイン関数, システム制御情報学会論文誌, Vol. 35, No. 6, pp.165-174 (2022)

## 付録

ここでは (41) 式を満たす  $c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta}$  を求める.  
まず (41) 式で  $k$  を  $-(s_\alpha + \ell)$  とすると,

$$g_{s_\beta}(p - s_\alpha - \ell) = \sum_{\mu=0}^{s_\beta-1} c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \prod_{j=0}^{\mu-1} (j - \ell) \quad (77)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\ell} c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} (-1)^\mu \prod_{j=0}^{\mu-1} (\ell - j) \quad (78)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\ell} (-1)^\mu c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \frac{\ell!}{(\ell - \mu)!} \quad (79)$$

となる. ここで,

$$\phi_\ell = \frac{1}{\ell!} g_{s_\beta}(p - s_\alpha - \ell) \quad (80)$$

$$\psi_\mu = (-1)^\mu c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} \quad (81)$$

とすると, (79) 式より,

$$\phi_\ell = \sum_{\mu=0}^{\ell} \frac{1}{(\ell - \mu)!} \psi_\mu \quad (82)$$

となる.

さらに (38) 式より,  $\ell = 0, 1, \dots, s_\beta - 1$  とし,

$$\phi = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{s_\beta-2}, \phi_{s_\beta-1}]^T \quad (83)$$

$$\psi = [\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{s_\beta-2}, \psi_{s_\beta-1}]^T \quad (84)$$

とすると (82) 式より,

$$\phi = \mathbf{A}\psi \quad (85)$$

ただし,

$$\mathbf{A} = [A_{i,j}] \in \mathbf{R}^{s_\beta \times s_\beta} \quad (1 \leq i \leq s_\beta, 1 \leq j \leq s_\beta)$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{(i-j)!} & (i \geq j) \\ 0 & (i < j) \end{cases} \quad (86)$$

となる。

ここで、

$$\mathbf{B} = [B_{j,h}] \in \mathbf{R}^{s_\beta \times s_\beta} \quad (1 \leq j \leq s_\beta, 1 \leq h \leq s_\beta) \quad (87)$$

$$B_{j,h} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-h}}{(j-h)!} & (j \geq h) \\ 0 & (j < h) \end{cases} \quad (88)$$

とする。また、

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [C_{i,h}] \quad (89)$$

とすると、

$$C_{i,h} = \sum_{j=1}^{s_\beta} A_{i,j} B_{j,h} \quad (90)$$

となる。

従って (86) 式 (88) 式 (90) 式より、

$$C_{i,h} = \begin{cases} \sum_{j=h}^i \frac{1}{(i-j)!} \frac{(-1)^{j-h}}{(j-h)!} & (i > h) \\ 1 & (i = h) \\ 0 & (i < h) \end{cases} \quad (91)$$

となる。また  $i > h$  の場合は、 $j-h$  を  $p$ 、 $i-h$  を  $n$  とすると、

$$C_{i,h} = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{(n-p)! p!} \quad (92)$$

となる。

ところで  $n \geq 1$  に対して、 $(x+1)^n$  を  $x$  のべき級数に展開し  $x = -1$  とすることにより、(92) 式が 0 となることが分かる。よって、

$$C_{i,h} = \begin{cases} 1 & (i = h) \\ 0 & (i \neq h) \end{cases} \quad (93)$$

となる。即ち  $\mathbf{C}$  は単位行列となり、(89) 式より  $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{A}$  の逆行列となる。

従って (85) 式より、

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{B} \boldsymbol{\phi} \quad (94)$$

となり、(88) 式の  $B_{j,h}$  より、

$$\psi_\mu = \sum_{h=0}^{\mu} \frac{(-1)^{\mu-h}}{(\mu-h)!} \phi_h \quad (95)$$

となる。すると (81) 式より、

$$c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} = (-1)^{-\mu} \psi_\mu = \sum_{h=0}^{\mu} \frac{(-1)^h}{(\mu-h)!} \phi_h \quad (96)$$

となり、(80) 式を (96) 式に代入すると、

$$c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} = \sum_{h=0}^{\mu} \frac{(-1)^h}{(\mu-h)!} \frac{1}{h!} g_{s_\beta}(p-s_\alpha-h) \quad (97)$$

となる。さらに (37) 式を用いることにより、

$$c_{\mu,p,s_\alpha,s_\beta} = \sum_{h=0}^{\mu} \frac{(-1)^h}{(\mu-h)!} \frac{1}{h!} \prod_{\ell=1}^{s_\beta-1} (p-s_\alpha-h+\ell) \quad (98)$$

となる。