

ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく
螺旋および等角図の幾何学的考察
— 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ* —

中西 真悟**

情報センター

(2020年12月14日受理)

Geometric Characterizations of Spirals or Isometric Projection
about Pythagorean Theorem and Standard Normal Distribution
— Modeling with Triangles, Squares, and Similar Metallic Ratios —

by

Shingo NAKANISHI

Computing Center

Abstract

We can describe drawings created using spirals or isometric projections about the standard normal distribution by incorporating triangles, squares, and circles. We can reconsider Archimedean spirals and logarithmic spirals on the basis of the Pythagorean theorem and the standard normal distribution with respect to certain Kepler triangles. We can then suggest a hypothesis regarding the spiral orbits and propose ratios similar to the major metallic ratios and the platinum ratio for Archimedean spirals. By applying the said ratios to logarithmic spirals, we can obtain results that are identical to those obtained by considering the major metallic ratios (including the platinum ratio) on the basis of some well-known sequences. Furthermore, images based on the concept of squaring the circle can also be illustrated to apply isometric projections. From geometric and isometric viewpoints, one heart shape and twelve diamonds are shown at the meaningful probability points of standard normal distribution.

キーワード ; ピタゴラスの定理, 三角形, 正方形, 円, 確率, 黄金比, 白銀比, 青銅比, 白金比, 螺旋

Keyword ; Pythagorean Theorem, Triangles, Square, Circle, Probabilities, Golden Ratio, Silver Ratio,
Bronze Ratio, Platinum Ratio, Spirals

* ある研究会の発表申込み完了後にコロナ過で延期となった。速報の代用研究ノートとして投稿

** 大阪工業大学情報センター 准教授

1. はじめに

本研究では、いくつかの螺旋が標準正規分布上で視覚的にかつ幾何学的に広がっていく特徴を報告することが主題である。具体的には、一つは螺旋について標準正規分布に従う累積確率のような比としての広がり関係を考察することである。もう一つは、等角図法にも同様な広がり方があり、これを標準正規分布の視覚化に適用した場合の紹介である。本報を研究論文として公表せず、研究ノートとして公表するのは、発表申込みをした研究会が9月上旬にコロナ禍により開催延期になったので代用投稿したためである。このため、紀要提出締切日までに本報を十分に記述しきれていないことと、1年前に正規分布に螺旋の可能性を示唆¹⁾したことも鑑み、より多くの研究者に興味や関心を持っていただき、著者が見つけ切れていない重要な知見があるならば、探求してもらえるように公表を行っている。

さて、その標準正規分布上に、著者は独自の発想で、ピタゴラスの定理（三平方の定理）を用いて、標準正規分布に関する二組の常微分方程式^{2,4)}、すなわち、標準正規分布を記述する二階線形微分方程式と、逆ミルズ比を記述するベルヌーイ型の微分方程式の両方の曲線を合成した関係式を切片系の直線の数式として提案している²⁾。この研究は、手数料を考慮したコイン投げの繰り返しゲーム⁵⁾において放物線を見つけたところから始まったが、これまでにいくつかの幾何学的に興味ある結果¹⁻⁵⁾が明らかになった。このときの成果報告の中で螺旋の可能性についても言及した¹⁾。その論文の紙面の制約と螺旋の可能性に関する表記があいまいであったので、現在までの成果について、研究ノートとして書き留めてきた知見を公表する。

そこで、アスペクト比（縦横比）が1となる縦と横の長さが等しい条件の中で図を多用して研究ノートの説明を視覚化しながら、本報ではいくつかの有名な三角形⁶⁻¹³⁾と標準正規分布や黄金比^{1,14-22,25)}、白銀比^{15,16,19-25)}、青銅比^{15,25)}、白金比等^{25,26)}との関係を再考し、螺旋構造やその数列式について次のような提案や仮説を行っている。

- (A) 研究着想に影響を与えた種々の有名な三角形を用いて正方形と標準正規分布の再考（図—1参照）
- (B) 代数螺旋について、原点から標準正規分布に

従う確率点までをベースとした正規化の基準により、確率点による累積確率やその逆数の傾きを描いて、縦横比（アスペクト比）が1になる図の視覚化（図—2参照）

- (C) (B)の代数螺旋にケプラーの三角形を用いたピタゴラスの定理（三平方の定理）と黄金比の関係を再考（図—3参照）
- (D) (C)の代数螺旋の軌道に関する幾何学的仮説（図—4参照）
- (E) (C)の代数螺旋に関する標準正規分布と白金比を含む貴金属比と類似の比による関係式の提案（図—5参照）
- (F) (C)の代数螺旋について本来は視覚化できない確率点が0のときと、確率点が無限大のときの考察（図—6参照）
- (G) 白金比を含む貴金属比と類似の比による等角（対数）螺旋の視覚化と数理関係の考察（図—7参照）
- (H) 真の白金比による等角螺旋構造の可視化と、等角螺旋の数列式による表現方法の提案（図—8参照）

を行っている。また、等角図法を用いて、

- (I) これまでの前作研究の標準正規分布と円積問題²⁷⁾、標準正規分布とピタゴラスの定理を再考し、円、正方形、三角形による等角図法（等測投影）²⁸⁻³⁰⁾を用いた意味ある確率点でのハート型や12個の菱形（ダイヤモンド型）の作図（図—9参照）

を考察している。

(A)では、全体を構想するために必要な有名な三角形、正方形、黄金比、標準正規分布の関係を簡潔に図として例示する。(B)から(H)ではピタゴラスの定理に基づく標準正規分布による代数螺旋^{31,32)}と対数螺旋^{33,34)}の発想で2種の螺旋構造について白金比を含めた貴金属比と類似する比との相性を交えて考察している。(I)では、正規分布と円積問題および等角図法で重要な鍵となった標準正規分布の広がりや正三角形を意味する傾きを例示している。以上の前に、2章では、本報で用いる標準正規分布と、黄金比に用いられる数式記号 ϕ や Φ を区別するため、表記がわかりやすいように説明を加えている。また、なぜピタゴラスの定理と標準正規分布が結びつくのか

を前作研究¹⁾の必要な部分を引用して簡潔に説明している。同時に、代数螺旋の軌道について仮説を先に提示している。

2. 本報の重要式のエッセンス

本研究では、確率変数 $U \sim N(0,1^2)$ に従う標準正規分布の確率密度関数は慣例に従い

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad (2.1)$$

と表記する。その累積分布関数は

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(z) dz \quad (2.2)$$

と表記する。同様に大変紛らわしいのではあるが、黄金比とその逆数もまた、 ϕ や Φ で記述することが一般的である^{16,17)}。したがって、本報におけるその対応を明記する。本研究の記述で標準正規分布の片側確率点 $u = k$ が

$$(u = k)k_G = 0.7931383 \dots \quad (2.3)$$

となるとき、下記の式が黄金比

$$1 + \Phi(k_G)^2 = \text{Golden Ratio} \left(= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad (2.4)$$

を示し、一貫してこの記述による提案と仮説やその分析を行っている。具体的には、黄金比の平方根を応用した

$$\Phi(k_G)\sqrt{1 + \Phi(k_G)^2} = 1 \quad (2.5)$$

を RIMS2158-20¹⁾で公表し、この式による螺旋の可能性を示唆している。

本報では、何故敢えて紛らわしい黄金比の小数部に平方の形式である累積確率の二乗 $\Phi(k_G)^2$ を表記して $1 + \Phi(k_G)^2$ を用いる黄金比を活用するのかは、以下の二つの明確な理由がある。

一つは、標準正規分布の確率密度関数を $\phi(u)$ と表記し、その累積分布関数を $\Phi(u)$ と表記するとき、累積分布関数 $\Phi(u)$ の積分形の解の一つとして

の関数

$$h_p(u) = \phi(u) + u\Phi(u) \quad (2.6)$$

を用いる利点があるからである。 $\phi'(u) = -u\phi(u)$ および $\Phi'(u) = \phi(u)$ より、関数 $h_p(u)$ の導関数は標準正規分布の累積分布関数と等しく

$$h_p'(u) = \Phi(u) \quad (2.7)$$

と表記でき、関数 $h_p(u)$ の二階の導関数は標準正規分布の確率密度関数と等しく

$$h_p''(u) = \phi(u) \quad (2.8)$$

と表記できることが利用できるからである。もう少し具体的に説明すると、標準正規分布の変数係数二階線形微分方程式

$$h_p''(u) + uh_p'(u) - h_p(u) = 0 \quad (2.9)$$

の表記¹⁾を、式(2.6)から式(2.8)により展開して

$$u = \frac{h_p(u) - h_p''(u)}{h_p'(u)} \quad (2.10)$$

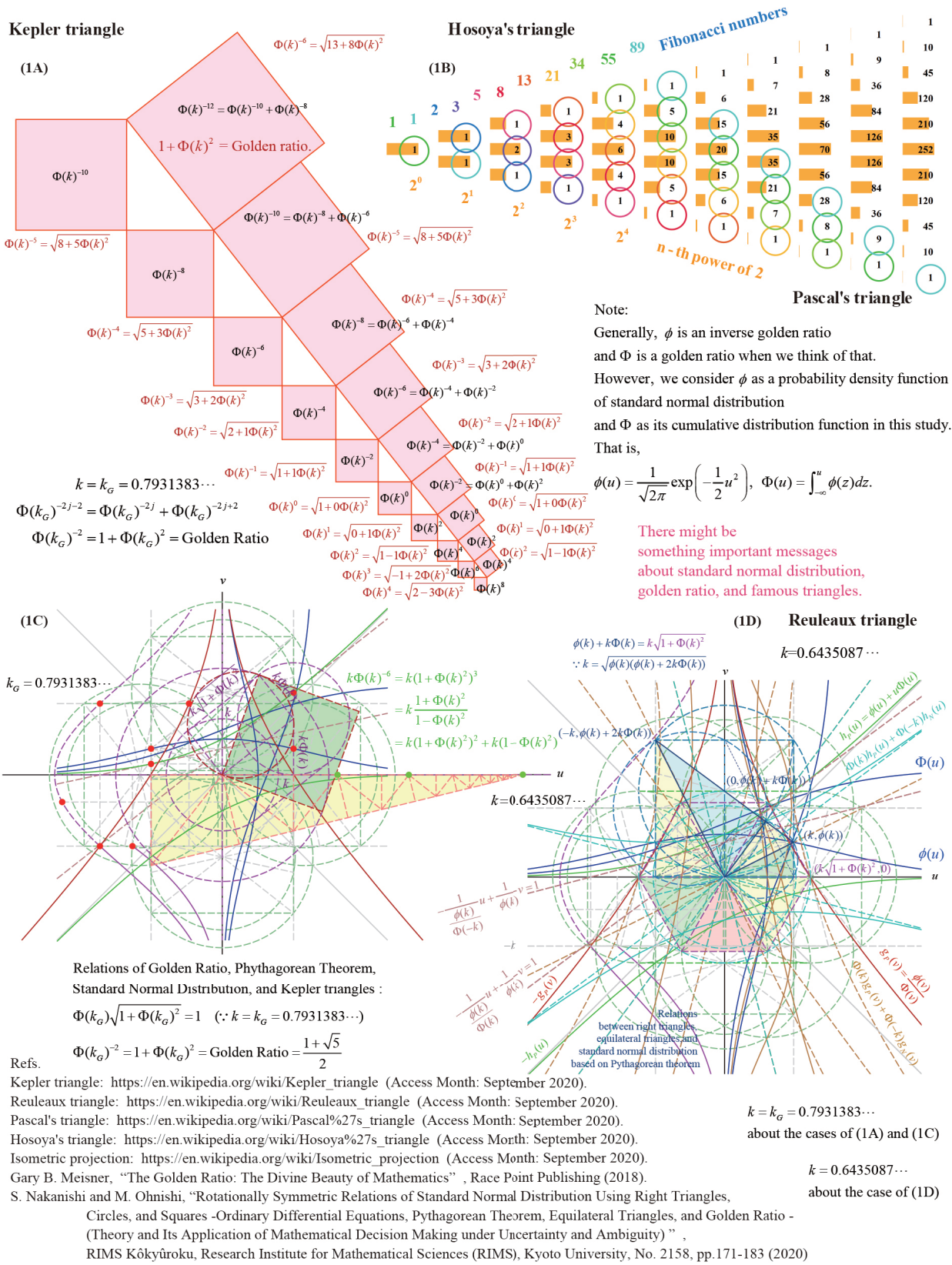
もしくは

$$h_p(u) - \phi(u) = u\Phi(u) \quad (2.11)$$

なる形式で思考すると見通しが良くなるからである。このとき、式(2.11)の $u\Phi(u)$ は、式(2.8)の累積分布確率 $\Phi(u)$ の u 倍であるので、原点から確率点 $u = k$ までの距離を三角形の底辺となるベースと考えることができる。すなわち、底辺と高さの比率は $1:\Phi(k)$ で表せ、累積確率 $\Phi(k)$ による表記が 0 から 1 の傾きを示す直角三角形であると考えればよいことがわかる。この比を用いて、ピタゴラスの定理（三平方の定理）による斜辺の二乗、もしくは平方の形式は

$$\text{Square of hypotenuse} = k^2(1 + \Phi(k)^2) \quad (2.12)$$

が表記できる。式(2.12)のうち、式(2.5)を満たす確率点が黄金比を描くことになるので、その確率点 $u = k_G$ が式(2.4)を満たすように探せばよい。これが一つ



図—1 本研究の構想の鍵
Fig.1 Important Keys to this study

目の理由である．そして，黄金比以外の場合を考えた確率点 $u = k$ の提案にも大きな役割を果たす可能性があると思われ，関連や類似が予測できる幾何学的特徴を有する確率点を見つける機会を得た．

もう一つの理由は，ピタゴラスの定理による平方の活用を，一つ目の比である $1:\Phi(k)$ だけではなく，その n 倍の平方根を考慮した比率 $1:\sqrt{n}\Phi(k)$ の平方による正方形の可視化が活躍することである．また，比率 $1:\sqrt{n}\Phi(k)$ の活用で後述する代数螺旋と対数螺旋の両構造の説明が可能で，一つ目の理由で見つかった確率点と関連が予測できる有名な数列との親和性も明らかにできたからである．また，二つ目の理由により，標準正規分布とピタゴラスの定理が螺旋構造の解明に役立ったことを紹介し，紹介したアプローチから幾何学的にとっても都合の良い可視化の作図が得られたことも後述する．具体的には，本研究では，式(2.3)の確率点 $k_G = 0.7931383\dots$ 以外の他の確率点 $u = k$ による値を得る場合でも式(2.5)の拡張として，

$$\Phi(k)\sqrt{1+n\Phi(k)^2} = 1 \quad (2.13)$$

なる関係式が取り扱え，その特徴を調べている．そして，得られた値を貴金属比と類似の比として考察している．

また，根号が成立する範囲で任意の数値 n と y を与え，式(2.13)から発案する螺旋の一つの軌道について， $w = \Phi(k)$ または $w = 1/\Phi(k)$ のときの恒等式

$$\begin{aligned} 2\left(\sqrt{1+nw^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{1+(n+y)w^2}\right)^2 \\ &+ \left(\sqrt{1+(n-y)w^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

に対応する代数螺旋であると仮説を行っている．

以降の本文中の説明や図の視覚化では，横軸には変数 u を活用し，縦軸には変数 v を活用して区別を付けることがある．しかし，それは標準正規分布に従う確率変数 $U \sim N(0,1^2)$ および $V \sim N(0,1^2)$ を明確に縦と横として区別することと，縦と横が同じ長さの目盛りになるようにアスペクト比（縦横比）を1とした直交座標系上で正方形や直角三角形を正しく図示できるようにする以外に意図はない．これ

らの変数 u や v のうちの実現値として取り得る幾何学的な位置情報を意味する値を確率点 k と表記する．また，黄金比のように特別な確率点を意図する場合には，その確率点を k_G のように k に下付きの添え字を加えて意味ある定数として取り扱った表記で説明を行う．

2・1 Pascal, Kepler, 細矢等の三角形と黄金比と正規分布の関係について

図—1の(1A)では，Kepler（ケプラー）の三角形⁶⁾が連なるのを視覚化している．

すなわち，図—1の(1A)では連なりの直線版を例示したが，一般にこのうちのピタゴラスの定理が成り立つ一組だけが紹介されることが多いことを想定し，連なりが広がる形を再考する．また，図—1の(1A)の平方から，式(2.5)を用いたKeplerの三角形は

$$\begin{aligned} \Phi(k_G)^{-2j-2} &= \Phi(k_G)^{-2j} + \Phi(k_G)^{-2j+2} \\ k_G &= 0.7931383\dots \\ 1 + \Phi(k_G)^2 &= \text{Golden Ratio} \end{aligned} \quad (2.15)$$

なる拡張の関係式が成り立つ．ここでは， j は任意の整数である．

図—1の(1B)では，これをPascal（パスカル）の三角形⁹⁾と細矢の三角形^{10,11)}で紹介している．この図には，二項分布から正規分布に近づく現象と，そこに現れるFibonacci（フィボナッチ）数列¹¹⁾の関係が示されている．この関係は正規分布における黄金比の関連⁹⁾が想像できる．このことが等角螺旋上に7章の数式として前二つの係数の値の重み付きの和となり，離散的に対数（等角）螺旋の構造を図示できることを後述する．

2・2 Reuleaux の三角形やその正三角形と標準正規分布の関係について

著者は，これまでに式(2.5)で示す数式を紹介し，式(2.15)で表記される関係を図—1の(1C)に図示している．これは，Keplerの三角形から導ける．このため，三角形が標準正規分布に重要な役割を果たすことが想起できる．そして，この考え方を代数螺旋の可能性として，図に $\sqrt{1+\Phi(k_G)^2}$ や $\sqrt{1+2\Phi(k_G)^2}$ が記述できることを示唆した¹⁾．この例示が本報の前半の主題である．

同様にこの考え方を拡張すると，図—1の(1C)に図示するように，黄金比に関連する標準正規分布の確

率点 u は $k = (k_G =)0.7931383 \dots$ である。また、この値以外の確率点でも重要な幾何学的特徴が現れる¹⁾。そのうちの一つの確率点は $k = 0.6435087 \dots$ である¹⁾。この確率点では、図—1の(1D)に示す標準正規分布上に Reuleaux (ルーロー) の三角形 (の内部に強調した正三角形)^{7,8)}が描ける。この作図は、独自の着想で標準正規分布に正三角形が描ける前作

の研究成果として発表した RIMS2158-20¹⁾の公表図を丁寧に Reuleaux の三角形も加え直した例示である。また、この図—1の(1D)では、正三角形が主役となる中でピタゴラスの定理¹¹⁾により幾何平均¹²⁾と同じ発想の直角三角形が描けることを紹介している。本報の図と前作の図¹⁾では図示していないが図—1の(1C)と同様に図—1の(1D)の三角形が数列とし

Generally, ϕ is an inverse golden ratio and Φ is a golden ratio when we think of that.

However, we consider ϕ as a probability density function of standard normal distribution

and Φ as its cumulative distribution function in this study.

That is,

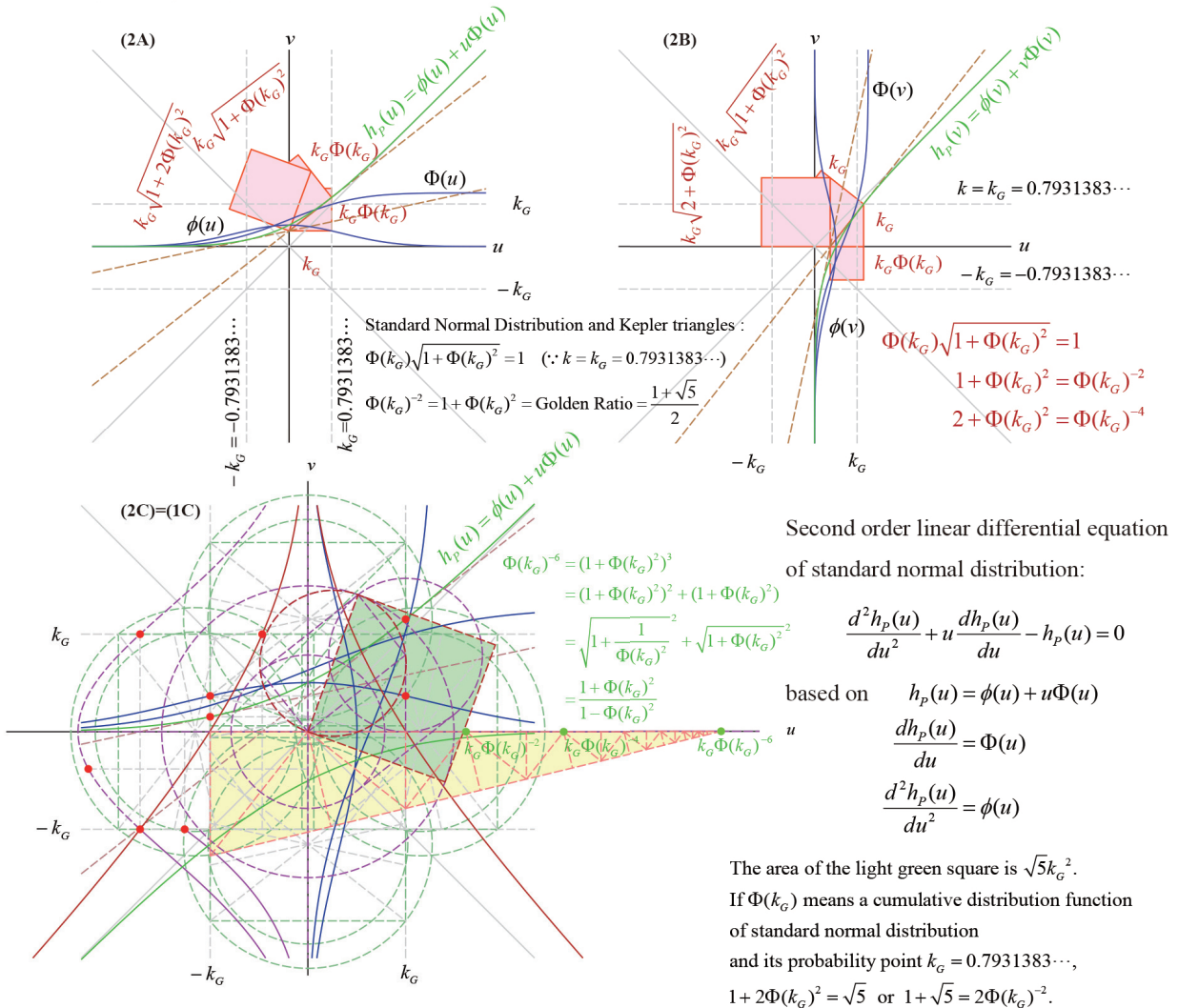
$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right), \quad \Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(z) dz.$$

$$k = k_G = 0.7931383 \dots$$

$$U \sim N(0,1^2)$$

about the cases from (2A) to (2C)

$$V \sim N(0,1^2)$$



図—2 ピタゴラスの定理による確率の二乗を考慮した螺旋の考え方
Fig.2 Concept of Spirals using Pythagorean Theorem about Ratio or Probability

て連なり収束していく傾向も想起できる。

以上から、いくつかの規則に従いながら拡がり（あるいは縮み）を標準正規分布上で描く特徴として、まずは本報の前半の3章から6章で代数螺旋について考察したい。代数螺旋の考察後に、7章で代数螺旋から明らかになった重要なことを活用して等角の特徴を有する対数螺旋の離散構造について考察を行う。後半の8章では、主となる話題を変更して、螺旋を取り扱う研究に至った拡がりを基に、等角図法による標準正規分布の作図を紹介したい。また、等角図法の拡がりに異なる視点で重要な鍵となった標準正規分布と円積問題の関係も作図に加えてその拡がりを対比している。

3. 代数螺旋への比としての確率の適用

本章で取り扱う螺旋は、任意の定数 a, b, c を用いた Archimedes (アルキメデス) の螺旋^{31,32)}

$$r = a + b\theta \quad (3.1)$$

と放物螺旋

$$r = a\sqrt{\theta} \quad (3.2)$$

の中間に位置する提案

$$r = \sqrt{a^2 + b^2\theta} \quad (3.3)$$

である。Archimedes の螺旋の一般形が

$$r = a + b\theta^{\frac{1}{c}} \quad (3.4)$$

であるので、その中の一案に含まれているかもしれないし、放物螺旋の一種として取り扱われてきたかもしれない。具体的には、 θ を変数 n (本稿では、 $n \geq -1/\Phi(k)$ を満たす整数のみを取り扱って公表している) と表記し直し、片側確率点が $u = k$ となる標準正規分布の累積分布関数の二乗 $\Phi(k)^2$ との積により表示している。また、確率の逆数の二乗 $\Phi(k)^{-2}$ を用いる手段も、式(3.3)の特徴を記述するには大変都合がよい。

ここで、図—2 に示すように螺旋の三角形の底辺をベースとしてその長さを正規化すると (図—2 の

(2A)を参照), その斜辺は

$$r_1 = \sqrt{1 + n\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + n\Phi(k)^2} \quad (3.5)$$

もしくは (図—2 の(2B))

$$r_2 = \sqrt{1 + n\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + n\frac{1}{\Phi(k)^2}} \quad (3.6)$$

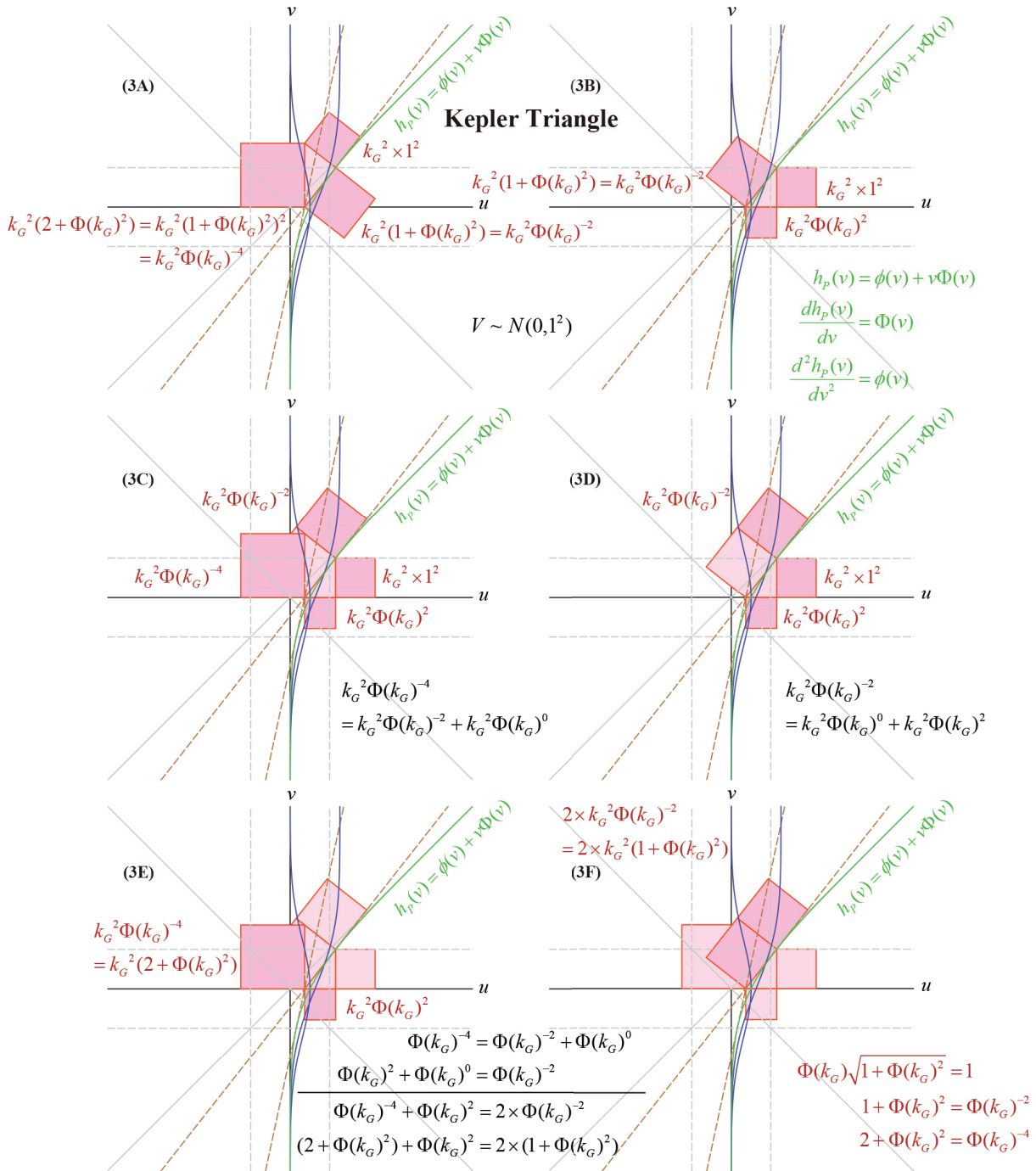
と表記し直すことができる。この時の $(b/a)^2$ の比は、式(2.14)に示すように確率の二乗 $w^2 = \Phi(k)^2 = (b/a)^2$ とするか、もしくはその逆数の二乗 $w^2 = 1/\Phi(k)^2 = (b/a)^2$ として用いるかが重要で、図—2 の(2A)と(2B)には比較のためにこれら両方の図を例示している。

また、図—2 の(2C)には、式(3.5)と式(3.6)を応用した Kepler の三角形によるピタゴラスの定理とその数列の視覚化

$$\begin{aligned} k_G^2 \Phi(k_G)^{-6} &= k_G^2 (1 + \Phi(k_G)^2)^3 \\ &= k_G^2 (1 + \Phi(k_G)^2)^2 + k_G^2 (1 + \Phi(k_G)^2) \\ &= k_G^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\Phi(k_G)^2}}^2 + k_G^2 \sqrt{1 + \Phi(k_G)^2}^2 \\ &= k_G^2 \frac{1 + \Phi(k_G)^2}{1 - \Phi(k_G)^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

を例示している。この傾向は図—2 の(2C)の三角形の数列が収束していく緑色で示す確率点とも相性が良い。

このことについては、本研究で論じる核でもある螺旋の一般方程式³²⁾に整合性を十分に検証できていないことから、本報は研究論文としてではなく研究ノートとして位置付けている。興味ある読者は、式(3.5)と(3.6)の応用も検証していただきたい。同時に黄金比を意味する標準正規分布上の確率点 $k_G = 0.7931383\dots$ を用いて、図—2 に示すように縦と横を交換しながら奥行きを感じさせない古代エジプト図の作画法を参考^{1,2)}にして確率密度関数の高さを意識せず標準正規分布を直角に回転させて、式(3.5)と式(3.6)による三角形の底辺の意味の違いを検証している。



Generally, ϕ is an inverse golden ratio and Φ is a golden ratio when we think of that.

However, we consider ϕ as a probability density function of standard normal distribution and Φ as its cumulative distribution function in this study.

That is,

$$\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right), \quad \Phi(v) = \int_{-\infty}^v \phi(z) dz$$

$$\Phi(k_G)^{-2} = 1 + \Phi(k_G)^2 = \text{Golden Ratio}$$

$$k = k_G = 0.7931383\dots$$

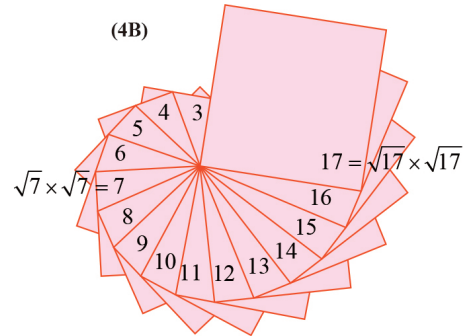
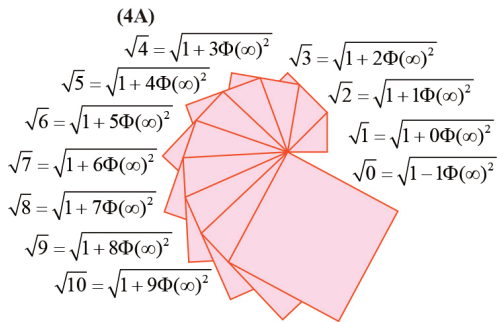
about the cases from (3A) to (3F)

図—3 図2の螺旋の幾何学的性質と螺旋軌道の仮説

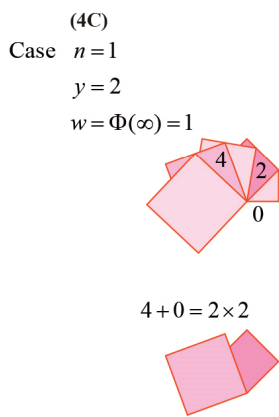
Fig.3 Geometries of Spirals using Pythagorean Theorem about Ratio or Probability

Theodorus spiral about the probability of standard normal distribution, $\Phi(k_0) = \Phi(\infty) = 1$, is invisible for us because the probability point is shown as $k_0 = \infty$.

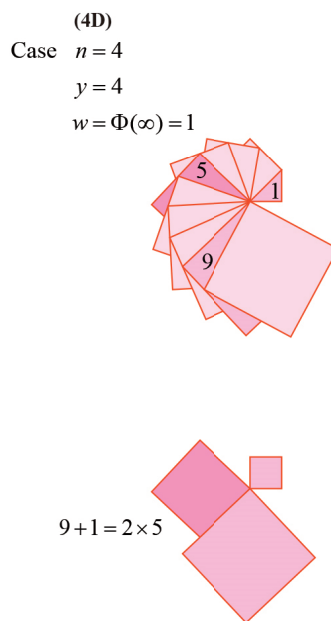
These areas by number $n (= -1, 0, 1, 2, \dots)$ about this condition are equal to $\sqrt{1+n\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+n\Phi(\infty)^2}$.



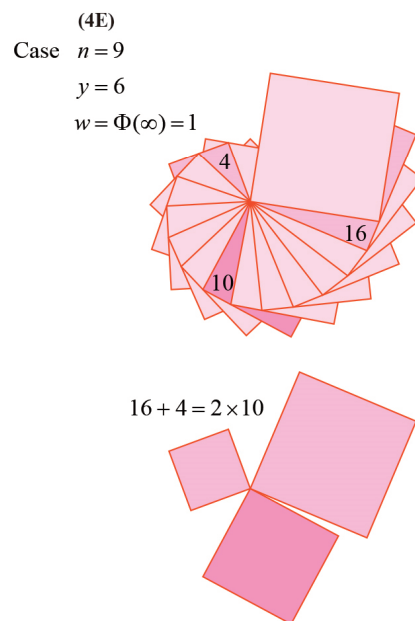
Theodorus spiral by using squares.



$$\begin{aligned} &\sqrt{1+(1-2)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(1-2)\Phi(\infty)^2} \\ &+ \sqrt{1+(1+2)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(1+2)\Phi(\infty)^2} \\ &= 2 \times \sqrt{1+(1+0)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(1+0)\Phi(\infty)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\sqrt{1+(4-4)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(4-4)\Phi(\infty)^2} \\ &+ \sqrt{1+(4+4)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(4+4)\Phi(\infty)^2} \\ &= 2 \times \sqrt{1+(4+0)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(4+0)\Phi(\infty)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\sqrt{1+(9-6)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(9-6)\Phi(\infty)^2} \\ &+ \sqrt{1+(9+6)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(9+6)\Phi(\infty)^2} \\ &= 2 \times \sqrt{1+(9+0)\Phi(\infty)^2} \times \sqrt{1+(9+0)\Phi(\infty)^2} \end{aligned}$$

Generally, ϕ is an inverse golden ratio and Φ is a golden ratio when we think of that. However, we consider ϕ as a probability density function of standard normal distribution and Φ as its cumulative distribution function in this study.

That is,

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right), \quad \Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(z) dz.$$

Case $n = x^2$

$$y = 2x \left(= \frac{dn}{dx} \right)$$

$$w = \Phi(k)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+(x^2-2x)\Phi(k)^2} \times \sqrt{1+(x^2-2x)\Phi(k)^2} \\ &+ \sqrt{1+(x^2+2x)\Phi(k)^2} \times \sqrt{1+(x^2+2x)\Phi(k)^2} \\ &= 2 \times \sqrt{1+x^2\Phi(k)^2} \times \sqrt{1+x^2\Phi(k)^2} \end{aligned}$$

based on

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+(n-y)w^2} \times \sqrt{1+(n-y)w^2} \\ &+ \sqrt{1+(n+y)w^2} \times \sqrt{1+(n+y)w^2} \\ &= 2 \times \sqrt{1+nw^2} \times \sqrt{1+nw^2} \end{aligned}$$

図—4 仮説による図3の螺旋の幾何学的性質の一例

Fig.4 Geometries of hypothesis of Spirals using Pythagorean Theorem about Ratio or Probability

表—1 主な貴金属比と本報の類似比に関する確率点の例示

Table 1 Major Metallic Ratios, Platinum Ratio, and These Related and Proposed Probability Points

Proposed Equations	Related Ratios		Squares of Probabilities about Related Ratios	
$\Phi(k_0)\sqrt{1 + \Phi(k_0)^2} = 1$	$n = 0$	—	$k_0 = \infty$	$\Phi(k_0)^2 = 1$
$\Phi(k_G)\sqrt{1 + \Phi(k_G)^2} = 1$	$n = 1$	Golden Ratio	$k_G = 0.7931383 \dots$	$\Phi(k_G)^2 = (\text{Golden Ratio})^{-1}$
$\Phi(k_S)\sqrt{1 + 2\Phi(k_S)^2} = 1$	$n = 2$	Silver Ratio	$k_S = 0.5449521 \dots$	$\Phi(k_S)^2 = 1 / 2$
$\Phi(k_B)\sqrt{1 + 3\Phi(k_B)^2} = 1$	$n = 3$	Bronze Ratio	$k_B = 0.4096890 \dots$	$\Phi(k_B)^2 = (\text{Bronze Ratio})^{-1}$
$\Phi(k_P)\sqrt{1 + 6\Phi(k_P)^2} = 1$	$n = 6$	Platinum Ratio	$k_P = 0.1951194 \dots$	$\Phi(k_P)^2 = 1 / 3$
$\Phi(k_{12})\sqrt{1 + 12\Phi(k_{12})^2} = 1$	$n = 12$	—	$k_{12} = 0$	$\Phi(k_{12})^2 = 1 / 4$

Note: This suggestion is different from that of the true metallic ratios. Because the platinum ratio is not a member of the true metallic ratios.

4. 確率適用の代数螺旋の数理

図—3 の(3A)と(3B)では、2組の Kepler の三角形の有名な部分を描いている。ここで、図—3 の(3A)と(3B)を重ね合わせて図—3 の(3C)を例示する。この結果、図—3 の(3D)のように一つだけ正方形を余分に描ける。このことは大変重要である。すなわち、図—3 の(3E)と(3F)に描く濃い桃色の正方形で記す各図のそれぞれの正方形の面積の和は下式のような表示式

$$(2 + \Phi(k_G)^2) + \Phi(k_G)^2 = 2(1 + \Phi(k_G)^2) \quad (4.1)$$

あるいは、ピタゴラスの定理の2式を重ね合わせた

$$\begin{aligned} \sqrt{(2 + \Phi(k_G)^2)^2} + \sqrt{\Phi(k_G)^2}^2 &= 2\sqrt{1 + \Phi(k_G)^2}^2 \\ \text{based on } \sqrt{(2 + \Phi(k_G)^2)^2} &= 1^2 + \sqrt{1 + \Phi(k_G)^2}^2 \\ \text{and } 1^2 + \sqrt{\Phi(k_G)^2}^2 &= \sqrt{1 + \Phi(k_G)^2}^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

と示すことができる。このことを応用したとき、図—1 の(1C)と図—2 の(1C)に示す薄緑色の正方形の面積は $\sqrt{5}k_G^2$ に等しいことがわかる。例えば、Mogi 氏³⁵⁾も Wikipedia に参考になる類似図を公開している。

4.1 確率適用の代数螺旋の軌道に関する仮説の具体例

式(4.2)の関係式は、実は図—3 だけではなく、広い

範囲で適用可能である。例えば、標準正規分布の累積確率が $\Phi(\infty) = 1$ の関係を想定し、図—4 の(4A)と(4B)に示す Theodorus (テオドロス)の螺旋³⁶⁾では、任意の頂点と頂点の間に曲線をイメージするならばその数値でも成立する。中でも面白いのは、図—4 の(4C)から(4E)で描かれるように螺旋の軌道図の変化に一定の規則が視覚化できる。すなわち、仮説で示した式(2.14)に基づき確率点が $k = k_0 = \infty$ により図—4 の(4C)から(4E)で描く場合の具体的な実数に対して

$$\begin{aligned} (1 + (x^2 + 2x)\Phi(\infty)^2) + (1 + (x^2 - 2x)\Phi(\infty)^2) \\ = 2(1 + x^2\Phi(\infty)^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

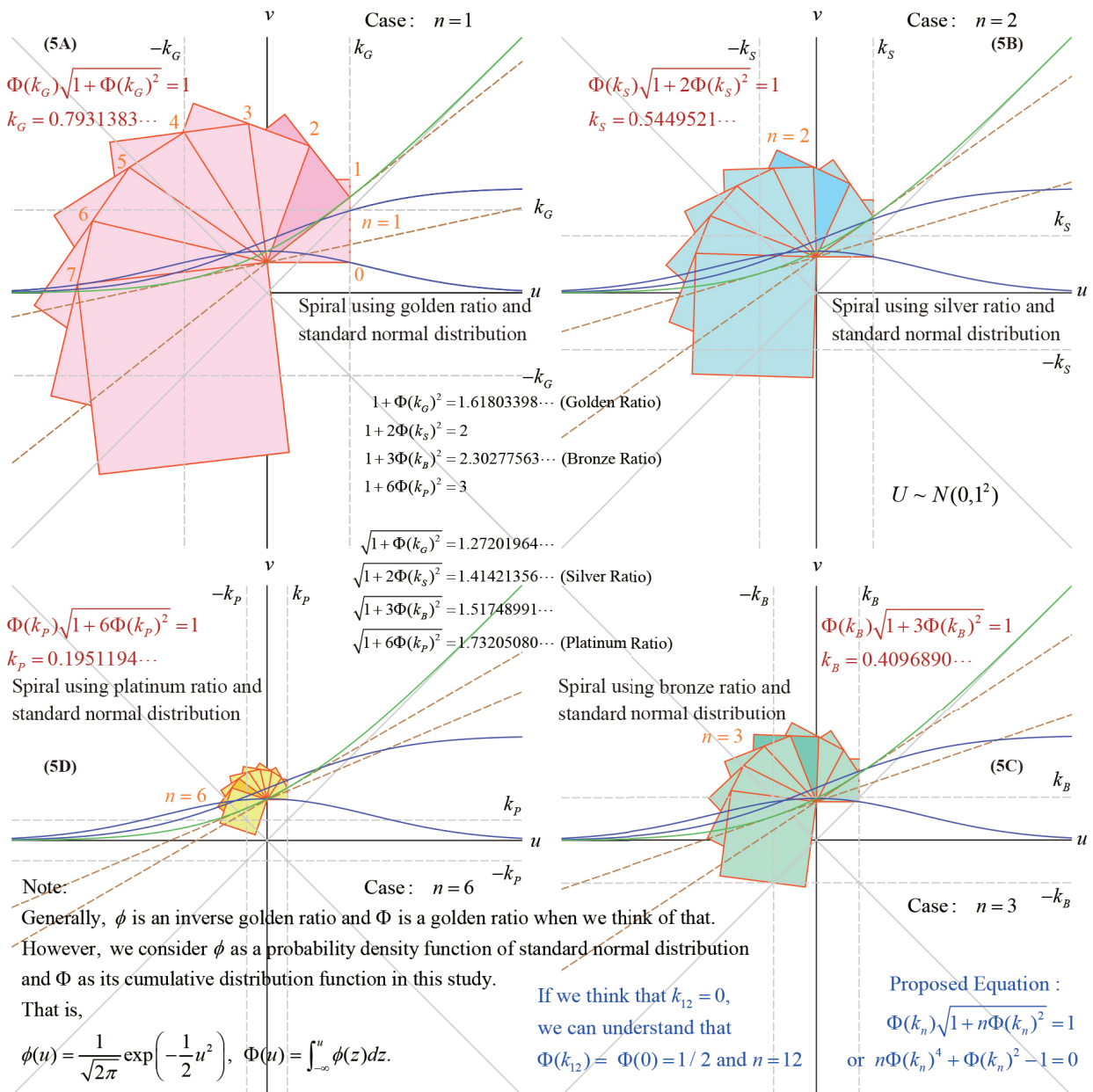
である。式(4.3)を表記するために式(2.14)に代入した条件は、 $k = k_0 = \infty$, $n = x^2$, $y = 2x \left(= \frac{dn}{dx} \right)$ である。興味ある読者は、さらなる探求や検証を実施してほしい。

4.2 確率適用の代数螺旋の縮小回転

ところで、4.1 に例示した通り Theodorus の螺旋は、確率を比として考察するならば、三角形の底辺やベースを 1 に基底する $\Phi(\infty) = 1$ の追加に相当する。仮に、 $n = -1$ を代入すると

$$\sqrt{1 - \Phi(\infty)^2} = 0 \quad (4.4)$$

ということになる。すなわち、式(4.4)や式(2.13)を拡張して、螺旋の構造は条件 $n > -1/\Phi(k)^2$ までが許されることになる。このことが意図することも後述する。



図—5 貴金属比と類似の比による螺旋の幾何学的性質
Fig.5 Geometries of Spirals using Proposed Ratios and These Probability Points

5. 貴金属比に類似する比の代数螺旋の数理

貴金属比²⁵⁾で黄金比, 白銀比, 青銅比の名称は大変有名である. 同様に, 白金比²⁶⁾もまた, 貴金属比に属さないものの有名な比の一つである. 本章では, これら全てを含めた類似比の提案を行う. ここで, 既に記した式(2.13)を再掲する.

$$\Phi(k)\sqrt{1+n\Phi(k)^2} = 1 \quad (5.1)$$

任意の定数となる確率点 k を想定し, この式に基づくと, n は

$$n = \frac{1 - \Phi(k)^2}{\Phi(k)^4} \quad (5.2)$$

と算出される. 本稿の成果は変数 n を整数として扱った場合のみを考察しているが, この式からわか

るように n は必ずしも整数とは限らない。しかし、逆に、下式のように

$$n\Phi(k)^4 + \Phi(k)^2 - 1 = 0 \quad (5.3)$$

と展開し、整数 n を与えて標準正規分布に従う累積確率 (Probability) を見積ることができる。この確率に相当する確率点を特に $k = k_n$ と表記して

$$k(= k_n) = \Phi^{-1}(\text{Probability}) \quad (5.4)$$

の値を探索できることが、本報を記述してきた前半の主題の鍵となる。表—1 に示すように確率点 k_n の結果で、特に周知の貴金属比や白金比と類似する傾向を有する数値には、 k_n の添え字に n の代わりに貴金属比の英文表記の頭文字を用いている。

確かに、 $n = 1$ から 3 までは従来からの貴金属比である黄金比(Golden Ratio)、白銀比(Silver Ratio)、青銅比(Bronze Ratio)との関連が一致している。そして、4 番以降は既知の貴金属比とは異なるが、 $n = 6$ では、これまで貴金属比に含まれなかった白金比(Platinum Ratio)がエントリーされている。

一方で、厳密に議論するならば、式(5.3)と式(5.4)による白銀比と青銅比が求まる確率点の値からは、白銀比や青銅比の数学的な比の数字よりも正確に 1 だけ小さい値が得られることがわかっている。

しかしながら、白銀比はデザインの世界では黄金比と同様に扱われ非常に有名であり、デザインの数学的な取り扱いでも大和比 ($1:\sqrt{2}$) が白銀比と同等¹⁹⁾に用いられることは周知である。

青銅比もまた岩本らの論文¹⁵⁾で周知の青銅比よりも 1 だけ小さい数字の場合も取り扱って示されていることから、本報に示す類似の青銅比も等価として記述を進める。このため、従来と同様の数値の精度を確保しているが、その導出過程が異なるために今後の比較や検証は必要である。したがって、注意点として本報では貴金属比の類似比として取り扱うこととする。以下では、記述の簡略化のため、類似する比とは明記せずに黄金比、白銀比、青銅比を単に貴金属比として説明に用いることがある。

特記すべき点として、 $n = 12$ では、 $\Phi(0) = 1/2$ となる確率点で $k_{12} = 0$ を示す。

したがって、 $n \geq 0$ において、13 個の確率点の候補があるのだが、うち一つは、確率点が $k_0 = \infty$ となる累積確率は $\Phi(\infty) = 1$ のため、 $n = 0$ となる

特別な意味を有する。実際には、自然数に当てはまる 12 個の n が三角形の特徴を有する。

このことについて、図—5 では、表—1 と式(5.1)に示す結果を用いて $n = 1, 2, 3$ および 6 までの代数螺旋として描いている。すなわち、図—5 の中にその特徴をわかりやすいように区別して

- $n = 1$ のとき、黄金比として(5A)を図示、
- $n = 2$ のとき、白銀比として(5B)を図示、
- $n = 3$ のとき、青銅比として(5C)を図示、
- $n = 6$ のとき、白金比として(5D)を図示

している。

この時の確率点 k_n が、表—1 に掲載している通りの結果を得て、標準正規分布に対する代数螺旋構造の特徴を決定する。図—5 では、求まる重要な n の斜辺がどの順位の n であるかを見つけやすいように各比の n に相当する色を特別に濃く表示している。

また、式(2.6)による緑色で描く 1 番目の斜辺に確率点で接しながら重なる曲線 $h_p(u)$ は、式(2.9)で示す標準正規分布の 2 階線形微分方程式を意図する累積分布関数の積分形の一つ $\phi(u) + u\Phi(u)$ であり、斜辺はその 1 階の導関数 $\Phi(u)$ を示す傾きを意味する。このことは本報の着想では非常に重要である。

では、既知の貴金属比や白金比と相性が良い理由は何であろうか。既知の貴金属比を求める二次方程式

$$\lambda^2 - n\lambda - 1 = 0 \quad (5.5)$$

の解の公式^{15,16)}は

$$\lambda = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \quad (5.6)$$

である^{15,16)}。

一方、本章では、式(5.3)を用いて

$$\Phi(k_n)^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n}}{2n} \quad (5.7)$$

と記述できる数式が、確率点 k_n を探す役割を果たす。

すなわち、式(5.6)と(5.7)の二つの数式に記す解の

公式の根号内にはどちらも +4 が書き加えられるために相性が良いと考えられる。このことを検証することは今後の課題である。

6. 確率点 $k = 0$ や $k = \infty$ による代数螺旋の数理

図—6の(6A)には、 $k_0 = \infty$ で標準正規分布に従う累積確率 $\Phi(\infty) = 1$ を描いている。式(5.2)から、 $n = 0$ を得る。したがって、縦横比(アスペクト比)が1になる直角二等辺三角形から、Theodorusの螺旋の伸縮版を描く確率を用いてみると、このことがわかるのだが、このときの確率点は $k_0 = \infty$ のため、実際には標準正規分布を明示して代数螺旋を視覚化することは不可能である。

同様に、 $k_{12} = 0$ の場合についても視覚化できない。ところが、式(5.2)から、 $n = 12$ が求まる。 $n = 0$ から 12 までの代数螺旋の共通な数理関係は、4章と5章に示す図—3、図—4、図—5のそれぞれに例示する傾向のように視覚化できるので、このことを参考に、4・2で示した $n > -\Phi(k)^{-2}$ の意味を考察

する。

すなわち、累積確率の平方を n 倍した $n\Phi(k)^2$ を減算した k に関する4つの方程式

$$\Phi(k)\sqrt{1 - \Phi(k)^2} = 1 \tag{6.1}$$

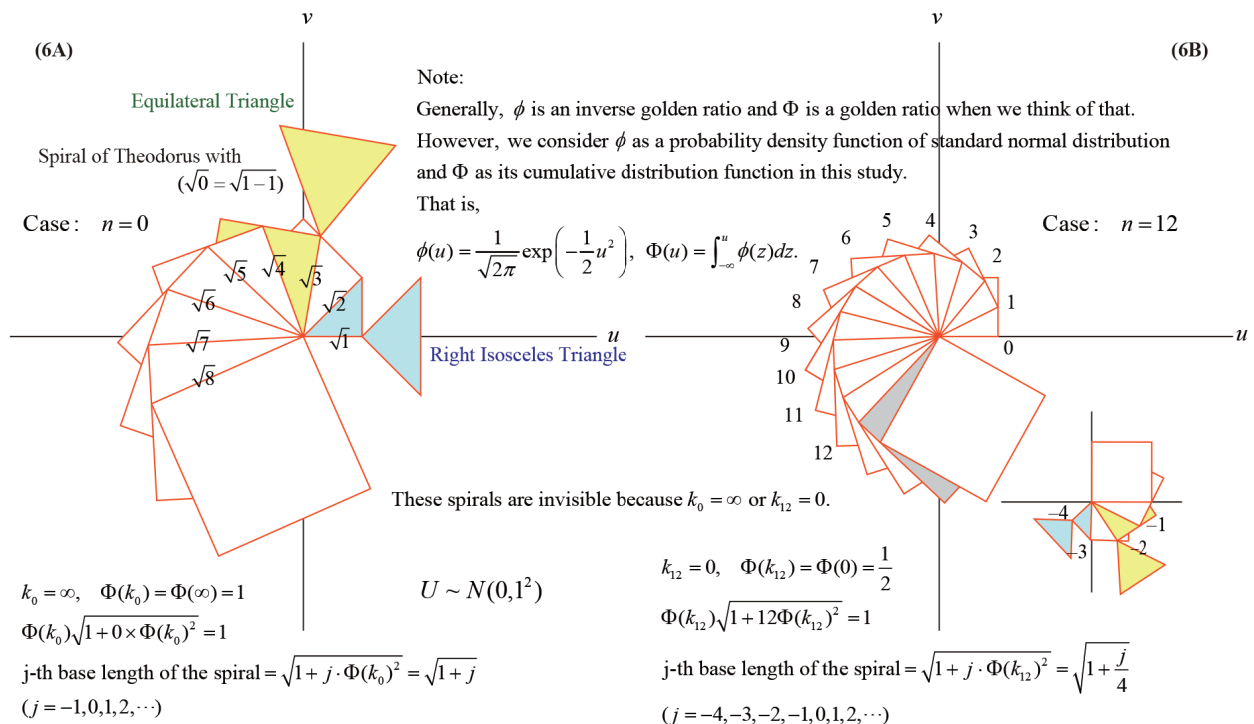
$$\Phi(k)\sqrt{1 - 2\Phi(k)^2} = 1 \tag{6.2}$$

$$\Phi(k)\sqrt{1 - 3\Phi(k)^2} = 1 \tag{6.3}$$

$$\Phi(k)\sqrt{1 - 4\Phi(k)^2} = 1 \tag{6.4}$$

は、異なるそれぞれの代数螺旋が開始順序を変更した Theodorus の螺旋を描く基本式であるとも考えられる。

黄金比 ($n = 1$) に注目する場合には、式(6.1)だけが成立して視覚化が可能である。白銀比 ($n = 2$) に従う場合は、使えるのは式(6.1)と式(6.2)に限定される。同様に白金比 ($n = 6$) の場合も式(6.1)から式(6.3)までが活用できる。このように考えると、 $n = 12$ の場合は、上記4式を活用した三角形による代数螺旋であることがわかる。すなわち、式(6.1)から式(6.4)は三角形の底辺の長さが1をベースにした代数螺旋を基準とする確率点から逆に回転した縮小の軌道で



図—6 確率点が0と無限大を示すときの螺旋軌道の仮説
Fig.6 Geometries of Spirals using Pythagorean Theorem about Probability Points of $\Phi(0) = 1/2$ and $\Phi(\infty) = 1$

ある．そして，その最小の三角形が直角二等辺三角形に，最小の三角形から3番目の三角形が正三角形になる傾向がわかる．このようにして，Theodorusの螺旋が，拡大あるいは縮小を伴う回転を再帰していることがわかる．

さらに， $n > 13$ では，代数螺旋の通常回転は成立しており，標準正規分布を用いるならば負の値を有する確率点が得られる．これらに関する新たな特徴については，まだ厳密には十分に確かめていない．7章では，現在わかっている負の値である確率点の特徴の一部を記載するので，読者で関心がある方は検証してみてください．

以上が，本報の前半の主題となる標準正規分布に関連した代数螺旋の記述である．7章では，対数（等角）螺旋の構造について，本報の中心的な主題でもあるピタゴラスの定理に基づく平方を活用し，6章と表—1で記述した結果と対比しながら考察を行う．したがって，表—1が示す n が0から12までを特に詳しく可視化しながら検証していく．

7. 黄金比，白銀比，青銅比，白金比との対数（等角）螺旋の幾何学的特性

図—7の(7A)には表—1に掲載する $n = 1$ の確率点 k_G による黄金比をもとに，新たな図の表現法として，Keplerの三角形の等角螺旋版を図示している．同様に，

- ・図—7の(7B)には， $n = 2$ の確率点 k_S による白銀比をもとに，
- ・図—7の(7C)には， $n = 3$ の確率点 k_B による青銅比をもとに，
- ・図—7の(7D)には， $n = 6$ の確率点 k_P による白金比をもとに，

とKeplerの三角形を拡大解釈する等角螺旋の応用版を作図している．等角螺旋あるいは対数螺旋と呼ばれるこの螺旋は，Descartes（デカルト）やJakob Bernoulli（ヤコブ・ベルヌーイ）が見つけたことで有名である³⁴．したがって，螺旋の軌道を連続的に描くべきであるが，本章では，前章までの関連事項と対比するため，離散的な等角螺旋に従う三角形の幾何学的特徴を中心に記述する．

7.1 黄金比と等角螺旋の再考

まずは，黄金比を

$$\Phi(k_G)\sqrt{1 + \Phi(k_G)^2} = 1 \quad (7.1)$$

として取り扱う．この式を平方して展開するとき

$$\Phi(k_G)^{-2} = 1 + \Phi(k_G)^2 \quad (7.2)$$

がKeplerの三角形として取り扱える．同時にKeplerの三角形の直線拡大版である図—1の(1A)や，Keplerの三角形の等角螺旋の拡大版である図—7の(7A)に図示するように，その伸縮する連なりを平方の和で示すべき乗形式として描くことが可能である．すなわち，

$$\begin{aligned} \Phi(k_G)^{-2} &= \Phi(k_G)^0 + \Phi(k_G)^2 \\ \Phi(k_G)^{-4} &= \Phi(k_G)^{-2} + \Phi(k_G)^0 \\ \Phi(k_G)^{-6} &= \Phi(k_G)^{-4} + \Phi(k_G)^{-2} \\ \Phi(k_G)^{-8} &= \Phi(k_G)^{-6} + \Phi(k_G)^{-4} \\ \Phi(k_G)^{-10} &= \Phi(k_G)^{-8} + \Phi(k_G)^{-6} \\ &\vdots \\ \Phi(k_G)^{-2j-2} &= \Phi(k_G)^{-2j} + \Phi(k_G)^{-2j+2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

と表される．ここに， j は正の整数である．そして，この関係式は

$$\begin{aligned} \Phi(k_G)^{-2} &= 1 + \Phi(k_G)^2 \\ \Phi(k_G)^{-4} &= 2 + \Phi(k_G)^2 \\ \Phi(k_G)^{-6} &= 3 + 2\Phi(k_G)^2 \\ \Phi(k_G)^{-8} &= 5 + 3\Phi(k_G)^2 \\ \Phi(k_G)^{-10} &= 8 + 5\Phi(k_G)^2 \\ &\vdots \\ \Phi(k_G)^{-2j} &= F_{j+1} + F_j \cdot \Phi(k_G)^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

とも表記できる．これは，Fibonacci数列¹¹を意味する j 番目に示す数列の値 F_j による展開として周知である．すなわち，式(7.3)の表示形式は，このことを平方による表示形式として書き直した式であるとわかる．したがって，図—7の(7A)に示すように黄金比を保つKeplerの三角形による等角螺旋構造は，Fibonacci数列を用いた重みづけの螺旋の拡大もしくは縮小であり，その幾何学的特性が確認できる．

7.2 白銀比と等角螺旋の再考

7.1 と同様に, 表—1 および表—2 に示す確率点 k_S と $n = 2$ を式(5.1)に代入するとき, 白銀比は

$$\Phi(k_S)\sqrt{1 + 2\Phi(k_S)^2} = 1 \quad (7.5)$$

から得られる. これを平方して展開すると

$$\Phi(k_S)^{-2} = 1 + 2\Phi(k_S)^2 \quad (7.6)$$

は, Kepler の三角形を応用した等角螺旋の拡大版として取り扱える. すなわち, 図—7 の(7B)に図示するように, 螺旋の拡大をべき乗として描くことが可能である. このことを平方のべき乗形式で書き表すならば

$$\begin{aligned} \Phi(k_S)^{-2} &= \Phi(k_S)^0 + 2\Phi(k_S)^2 \\ \Phi(k_S)^{-4} &= \Phi(k_S)^{-2} + 2\Phi(k_S)^0 \\ \Phi(k_S)^{-6} &= \Phi(k_S)^{-4} + 2\Phi(k_S)^{-2} \\ \Phi(k_S)^{-8} &= \Phi(k_S)^{-6} + 2\Phi(k_S)^{-4} \\ \Phi(k_S)^{-10} &= \Phi(k_S)^{-8} + 2\Phi(k_S)^{-6} \\ &\vdots \\ \Phi(k_S)^{-2j-2} &= \Phi(k_S)^{-2j} + 2\Phi(k_S)^{-2j+2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

と表示できる. ここに, j は正の整数である. このとき, 式(7.4)と同じ発想で 2 倍の重みを考慮した数列は

$$\begin{aligned} \Phi(k_S)^{-2} &= 1 + 2 \times 1\Phi(k_S)^2 \\ \Phi(k_S)^{-4} &= 3 + 2 \times 1\Phi(k_S)^2 \\ \Phi(k_S)^{-6} &= 5 + 2 \times 3\Phi(k_S)^2 \\ \Phi(k_S)^{-8} &= 11 + 2 \times 5\Phi(k_S)^2 \\ \Phi(k_S)^{-10} &= 21 + 2 \times 11\Phi(k_S)^2 \\ &\vdots \\ \Phi(k_S)^{-2j} &= S_{j+1} + 2S_j \cdot \Phi(k_S)^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

と Fibonacci 数列と同様の考え方に従っている. このことから, 式(7.8)の中で前の二組の数式の係数の値 S_{j+1} と S_j を基準とした新たな数列の値は $S_{j+2} = S_{j+1} + 2S_j$ として記述が可能である.

特に興味深い点は, 白銀比は大和比とも対比される正方形の対角線を意識した直角二等辺三角形をイメージすることが多い. 図—7 の(7B)では回転角度が $\pi/4$ である直角二等辺三角形の拡大および縮小による等角運動であることが確認できる. したがって, 黄金比と同様に白銀比がデザインの世界で注目される理由を感じることができる.

7.3 青銅比と等角螺旋の再考

7.1 や 7.2 では, 黄金比や白銀比を取り扱った. ここで同様の考え方を応用した発想で, 表—1 および表—2 に示す確率点 k_B による青銅比と $n = 3$ を式(5.1)に代入して

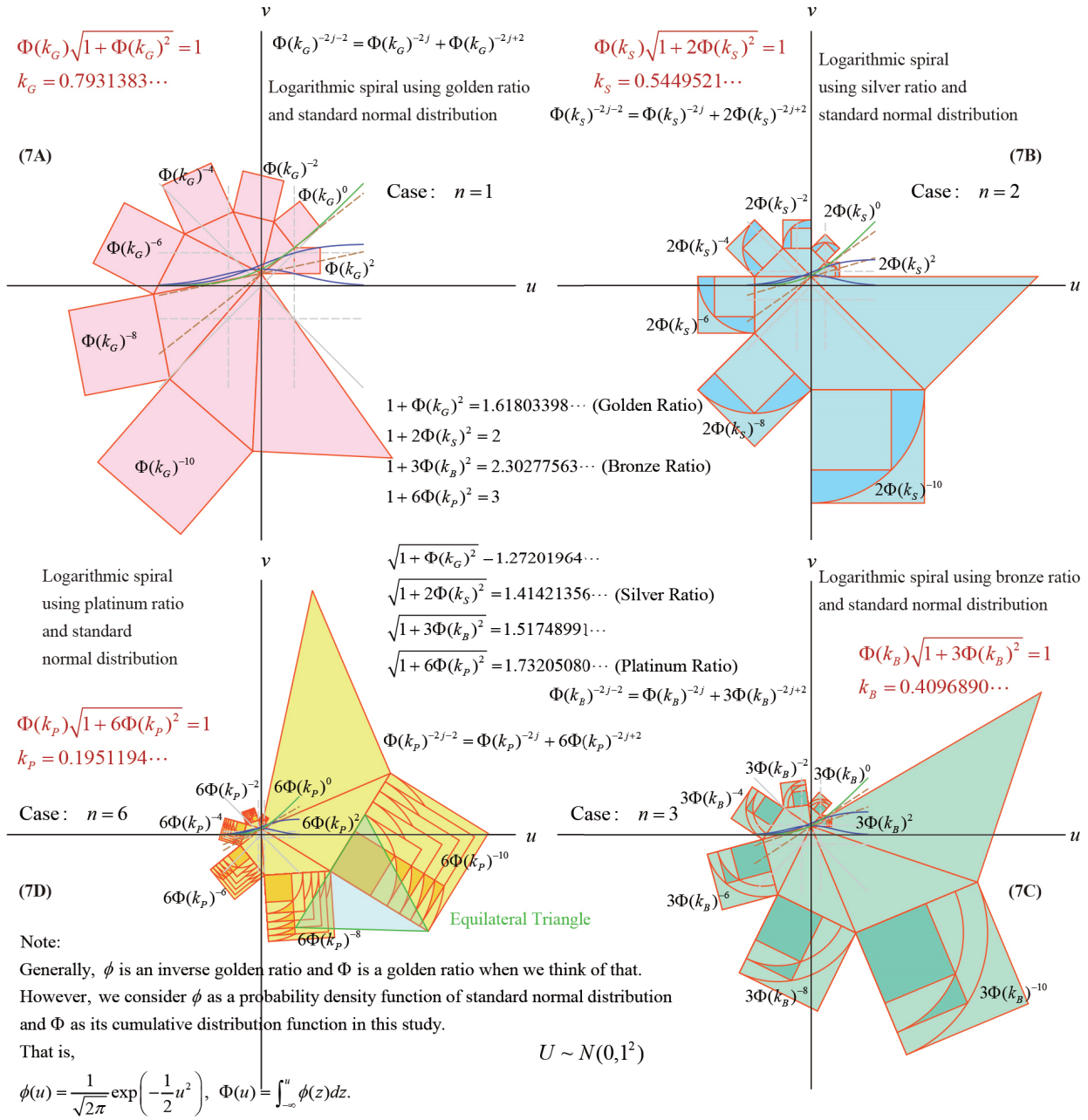
$$\Phi(k_B)\sqrt{1 + 3\Phi(k_B)^2} = 1 \quad (7.9)$$

表—2 主な貴金属比と本提案の類似比の比較表

Table 2 Comparisons about Major Metallic Ratios, Platinum Ratio, and These Related Ratios

Proposed Equations	Squares of Proposed Equations	Related Ratios	
$\sqrt{1 + 0\Phi(k_0)^2} = 1.$	$1 + 0\Phi(k_0)^2 = 1.$	$n = 0$	$k_0 = \infty$
$\sqrt{1 + 1\Phi(k_G)^2} = 1.2720 \dots$	$1 + 1\Phi(k_G)^2 = 1.618033 \dots$	$n = 1$	Golden Ratio
$\sqrt{1 + 2\Phi(k_S)^2} = 1.4142 \dots$	$1 + 2\Phi(k_S)^2 = 2.$	$n = 2$	Silver Ratio
$\sqrt{1 + 3\Phi(k_B)^2} = 1.5174 \dots$	$1 + 3\Phi(k_B)^2 = 2.302776 \dots$	$n = 3$	Bronze Ratio
$\sqrt{1 + 6\Phi(k_P)^2} = 1.7320 \dots$	$1 + 6\Phi(k_P)^2 = 3.$	$n = 6$	Platinum Ratio
$\sqrt{1 + 12\Phi(k_{12})^2} = 2.$	$1 + 12\Phi(k_{12})^2 = 4.$	$n = 12$	$k_{12} = 0.$
$\sqrt{1 + 72\Phi(k_{72})^2} = 3.$	$1 + 72\Phi(k_{72})^2 = 9.$	$n = 72$	$k_{72} = -0.43073 \dots$
$\sqrt{1 + 240\Phi(k_{240})^2} = 4.$	$1 + 240\Phi(k_{240})^2 = 16.$	$n = 240$	$k_{240} = -0.67449 \dots$
$\sqrt{1 + m(m-1)\Phi(k_{m(m-1)})^2} = \sqrt{m}$	$1 + m(m-1)\Phi(k_{m(m-1)})^2 = m$	$n = m(m-1)$	—

Note: $\Phi(k)$ is based on Equations (5.7) and (7.25) because $\Phi(k) = 1/\sqrt{m}$.



図—7 黄金比，白銀比，青銅比，白金比による離散的等角螺旋の幾何学的性質
 Fig.7 Discrete Geometries of Logarithmic Spirals using
 Pythagorean Theorem about Golden Ratio, Silver Ratio, Bronze Ratio, and Platinum Ratio

として取り扱った. これを平方して展開すると

$$\Phi(k_B)^{-2} = 1 + 3\Phi(k_B)^2 \quad (7.10)$$

は, Kepler の三角形を応用した等角螺旋の拡大版として取り扱える.

すなわち, このときも同様の発想を図—7 の(7C)

に図示できる. 等角螺旋の伸縮は, 平方によるべき乗形式を用いて描くことが可能なので

$$\begin{aligned} \Phi(k_B)^{-2} &= \Phi(k_B)^0 + 3\Phi(k_B)^2 \\ \Phi(k_B)^{-4} &= \Phi(k_B)^{-2} + 3\Phi(k_B)^0 \\ \Phi(k_B)^{-6} &= \Phi(k_B)^{-4} + 3\Phi(k_B)^{-2} \\ \Phi(k_B)^{-8} &= \Phi(k_B)^{-6} + 3\Phi(k_B)^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_B)^{-10} &= \Phi(k_B)^{-8} + 3\Phi(k_B)^{-6} & (7.11) \\ &\vdots \\ \Phi(k_B)^{-2j-2} &= \Phi(k_B)^{-2j} + 3\Phi(k_B)^{-2j+2}\end{aligned}$$

と表される．ここに， j は正の整数である．したがって，数列による関係式もまた

$$\begin{aligned}\Phi(k_B)^{-2} &= 1 + 3 \times 1\Phi(k_B)^2 \\ \Phi(k_B)^{-4} &= 4 + 3 \times 1\Phi(k_B)^2 \\ \Phi(k_B)^{-6} &= 7 + 3 \times 4\Phi(k_B)^2 \\ \Phi(k_B)^{-8} &= 19 + 3 \times 7\Phi(k_B)^2 \\ \Phi(k_B)^{-10} &= 40 + 3 \times 19\Phi(k_B)^2 & (7.12) \\ &\vdots \\ \Phi(k_B)^{-2j} &= B_{j+1} + 3B_j \cdot \Phi(k_B)^2\end{aligned}$$

と記述できる．このとき，図—7 の(7C)には $\sqrt{3}$ 倍の長さに修正される重みづけで正方形が見える．思わず白金比であるかと想像するが，本報で取り扱う方法とは異なるので，次節の白金比を考察する．

7.4 白金比と等角螺旋の再考

7.1 から 7.3 までと同様に，表—1 および表—2 に示す確率点 k_p による白金比と $n = 6$ を式(5.1)に代入して

$$\Phi(k_p)\sqrt{1 + 6\Phi(k_p)^2} = 1 \quad (7.13)$$

として取り扱った．これを平方して展開すると

$$\Phi(k_p)^{-2} = 1 + 6\Phi(k_p)^2 \quad (7.14)$$

は，Kepler の三角形の応用版として取り扱える．同時に図—7 の(7D)に図示するように，等角螺旋の伸縮をべき乗として描くことが可能である．すなわち，

$$\begin{aligned}\Phi(k_p)^{-2} &= \Phi(k_p)^0 + 6\Phi(k_p)^2 \\ \Phi(k_p)^{-4} &= \Phi(k_p)^{-2} + 6\Phi(k_p)^0 \\ \Phi(k_p)^{-6} &= \Phi(k_p)^{-4} + 6\Phi(k_p)^{-2} \\ \Phi(k_p)^{-8} &= \Phi(k_p)^{-6} + 6\Phi(k_p)^{-4} \\ \Phi(k_p)^{-10} &= \Phi(k_p)^{-8} + 6\Phi(k_p)^{-6} & (7.15) \\ &\vdots \\ \Phi(k_p)^{-2j-2} &= \Phi(k_p)^{-2j} + 6\Phi(k_p)^{-2j+2}\end{aligned}$$

と表される．ここに， j は正の整数である．したがって，この数列の関係式もまた

$$\Phi(k_p)^{-2} = 1 + 6 \times 1\Phi(k_p)^2$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_p)^{-4} &= 7 + 6 \times 1\Phi(k_p)^2 \\ \Phi(k_p)^{-6} &= 13 + 6 \times 7\Phi(k_p)^2 \\ \Phi(k_p)^{-8} &= 55 + 6 \times 13\Phi(k_p)^2 & (7.16) \\ &\vdots \\ \Phi(k_p)^{-2j} &= P_{j+1} + 6P_j \cdot \Phi(k_p)^2\end{aligned}$$

と記述できる．念のため，図—7 の(7C)の青銅比で意識した正三角形を図—7 の(7D)にも描き加えてみる．本報で取り扱う方法で見えたので描いておいたのだが釈然としない．

7.5 数列の再考

以上をまとめると， F_j ， S_j ， B_j および P_j が示す各数列の値は， $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ において

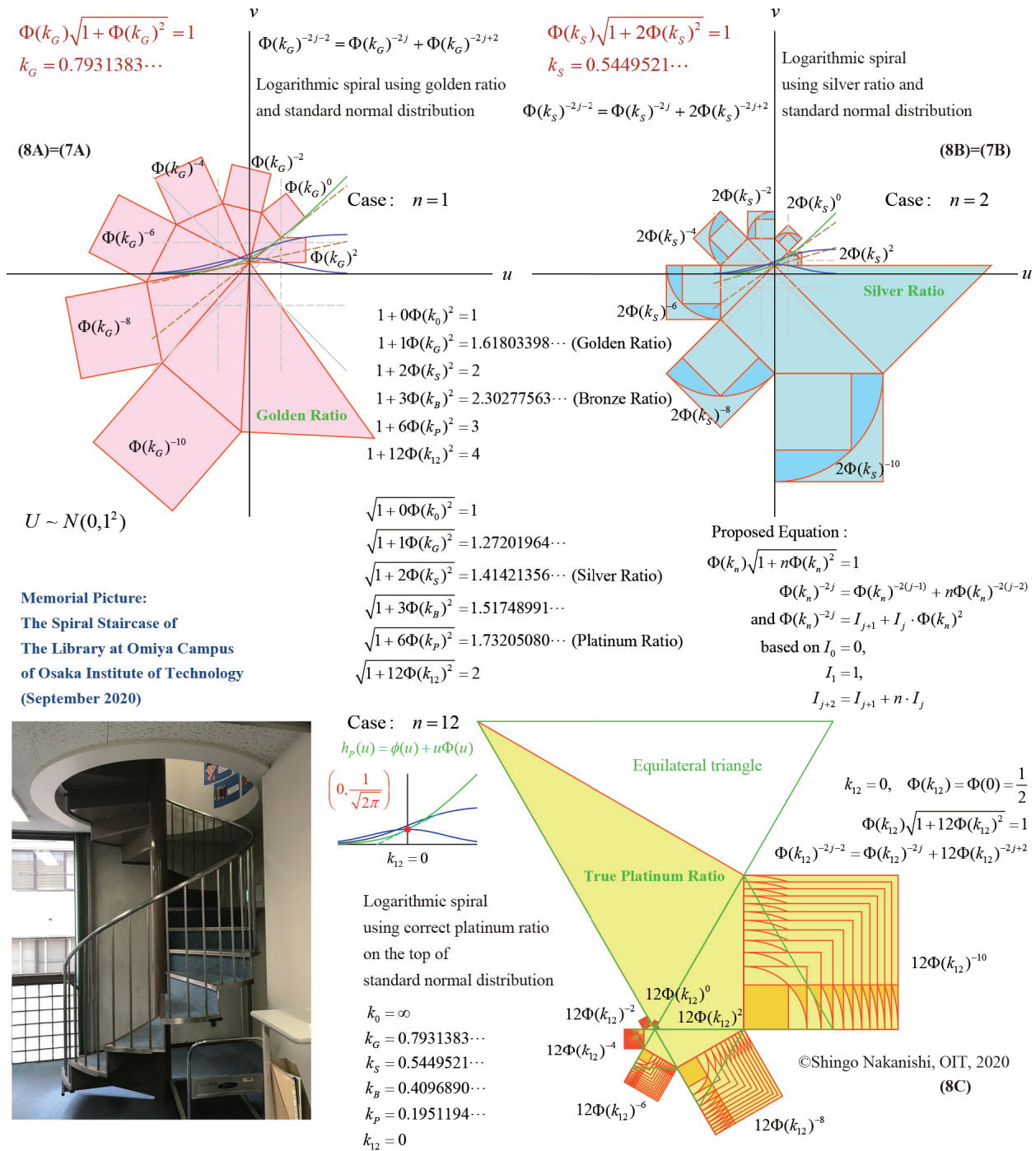
$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{j+2} &= F_{j+1} + F_j & (7.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_0 &= 0 \\ S_1 &= 1 \\ S_{j+2} &= S_{j+1} + 2S_j & (7.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_0 &= 0 \\ B_1 &= 1 \\ B_{j+2} &= B_{j+1} + 3B_j & (7.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_0 &= 0 \\ P_1 &= 1 \\ P_{j+2} &= P_{j+1} + 6P_j & (7.20)\end{aligned}$$

なる関係式が得られる．そして，それらを図示した等角螺旋が図—7 の(7A)から(7D)であることは明らかである．さらに，白銀比は従来からの基準で解釈される直角二等辺三角形を基本図形として，白金比には正三角形が隠された基準として表現されており，これらに Fibonacci 数列の考え方を応用した関係が視覚化できる．実際には，正三角形や直角三角形は間接的に青銅比や白金比や $n = 12$ の場合でも描ける．その一例として，正三角形を図—8 の(8C)に図示している．以上から，これらの比率の重みも考慮しながら，Fibonacci 数列の考え方を適用した数列は，どの等角螺旋とも一致して拡大することが確認できる．



It is practically invisible for us to see this chart of spiral about the true platinum ratio since the probability point of standard normal distribution is 0. However, we can feel the divine numbers 0 and 12 in our minds throughout the relation between equilateral triangles, squares, and circles with the standard normal distribution and the spirals.

Moreover, we can also imagine the other sequence of that as follows with 3 and 4 from an extended model of Kepler triangles.
 $\Phi(k_{12})^{-2j-2} = 3\Phi(k_{12})^{-2j} + 4\Phi(k_{12})^{-2j+2}$

図—8 黄金比, 白銀比, 真の白金比までの離散的等角螺旋の可視化
 Fig.8 Visualizations of the Discrete Geometries of Logarithmic Spirals using Pythagorean Theorem about Golden Ratio, Silver Ratio, and True Platinum Ratio

これらのことからわかるように、表—2 には提案した貴金属比に関連する類似比の数値の導出結果を掲載している。これらの数値や比は、従来から美しい比率としてこれまで崇められてきた黄金比、白銀比、青銅比としての貴金属比や、貴金属比に含まれなかった白金比との比較としても非常に興味深い。

一方で、負の確率点の特徴を説明する $n > 12$ についても表—2 に幾例かを記載している。一例として、第1四分位確率である $\Phi(k) = 1/4 = 1/\sqrt{16}$ を示す確率点となる $k_{240} = -0.67449\dots$ について、

$$n = 240 = 16 * 15 \quad (7.21)$$

および

$$2n + 1 = 16^2 + 15^2 = 2 \times 240 + 1 \quad (7.22)$$

が成立する。表—2 に数値を記載していない n と m についても幾例かを精査すると、具体的に活用できるための一般式は

$$n = m(m - 1) \quad (7.23)$$

と定義するか、もしくは

$$m^2 + (m - 1)^2 = 2n + 1 \quad (7.24)$$

が求まる。

以上から、表—2 に記す重要な関係式

$$1 + m(m - 1)\Phi(k_n)^2 = m \quad (7.25)$$

から、5章の式(5.2)は

$$\Phi(k_n)^{-1} = \sqrt{m} \quad (7.26)$$

または、表記し直して

$$m\Phi(k_n)^2 = 1 \quad (7.27)$$

が見通し良く成立する。したがって、このときの n が得られ、確率点 k_n を求めればよいことがわかる。すなわち、 n に関連する m は確率点 k_n での累積分布関数が示す確率 $\Phi(k_n)$ の逆数の二乗に反比例することが示せたので、その確率点 k_n を探す

のも楽である。

例えば、本報で取り扱った黄金比、白銀比、青銅比、白金比に類似する比に注目するとき、 $m = \text{Golden Ratio}$, Silver Ratio^2 , Bronze Ratio , もしくは Platinum Ratio^2 に関連する n は

$$\begin{aligned} n &= 1 \times (1 - 1) = 0 \\ n &= \text{Golden Ratio} \times (\text{Golden Ratio} - 1) = 1 \\ n &= \text{Silver Ratio}^2 \times (\text{Silver Ratio}^2 - 1) = 2 \\ n &= \text{Bronze Ratio} \times (\text{Bronze Ratio} - 1) = 3 \\ n &= \text{Platinum Ratio}^2 \times (\text{Platinum Ratio}^2 - 1) = 6 \\ n &= 4 \times 3 = 12 \end{aligned} \quad (7.28)$$

もまた容易に得られる。

ところで、本報の副題の三角形と四角形(正方形)にちなんで、その角数がそれぞれ3と4、白金比を含む有名な貴金属比(黄金比、白銀比、青銅比、白金比)との類似比が出尽くしたときに現れた重要な数字が $12 = 4 \times 3$ であると無理やり言葉遊びで記述を終えるが、読者は厳密に検証して著者がまとめ切れていない部分を定義してほしい。

このため、現在著者がわかっていることを補足する。表—1 の確率点 $k_{12} = 0$ を示す $\Phi(0) = \Phi(k_{12}) = 1/2$ を用いるならば

$$\Phi(k_{12})^{-2j-2} = \Phi(k_{12})^{-2j} + 12\Phi(k_{12})^{-2j+2} \quad (7.29)$$

と同時に、係数3および4を用いて

$$\Phi(k_{12})^{-2j-2} = 3\Phi(k_{12})^{-2j} + 4\Phi(k_{12})^{-2j+2} \quad (7.30)$$

と表記できる。もしくは、式(7.30)を書き換えて

$$\begin{aligned} 1^2 \times \Phi(k_{12})^{-2j-2} \\ = (\sqrt{3})^2 \times \Phi(k_{12})^{-2j} + 2^2 \times \Phi(k_{12})^{-2j+2} \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\therefore 1: \text{Platinum Ratio} = 1: \sqrt{3}$$

とも表記できる。この式(7.31)にもピタゴラスの定理が見つかる。

また、 $k_{12} = 0$ であるが故に可視化はできないのであるが、標準正規分布の確率点 $k_{12} = 0$ を式(2.6)に代入すると、その確率密度関数と同じく $h_p(k_{12})$ は

$$h_p(0) = \phi(0) + 0 \times \Phi(0) = \phi(0) \quad (7.32)$$

なので、確率点 $k_{12} = 0$ が示すこの数式は確率密度関数の頂上を意味する。

したがって、標準正規分布の確率密度関数の頂上に辿り着くと本来は可視化できない $n = 12$ の確率点 $k_{12} = 0$ ではあるが、本研究で明らかにしてきた等角螺旋の可視化の方法を応用するならば、図—8の(8C)に示すように描く等角螺旋の構造により、正三角形と正方形と標準正規分布の確率点 $k_{12} = 0$ が示す美しい幾何学的な景色を持ち合わせていたことが確認できる。

以上から、本報に示すピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋構造は式(5.3)を基準に拡張して、 $n = 12$ のみならず、その一般式のべき乗形式は

$$\begin{aligned} \Phi(k_n)^{-2 \times 0} &= \Phi(k_n)^{-2 \times (0-1)} + n\Phi(k_n)^{-2 \times (0-2)} \\ \Phi(k_n)^{-2 \times 1} &= \Phi(k_n)^{-2 \times (1-1)} + n\Phi(k_n)^{-2 \times (1-2)} \\ \Phi(k_n)^{-2 \times 2} &= \Phi(k_n)^{-2 \times (2-1)} + n\Phi(k_n)^{-2 \times (2-2)} \\ &\vdots \\ \Phi(k_n)^{-2j} &= \Phi(k_n)^{-2(j-1)} + n\Phi(k_n)^{-2(j-2)} \end{aligned} \quad (7.33)$$

もしくは

$$\begin{aligned} \Phi(k_n)^{-2 \times 0} &= I_1 + nI_0 \cdot \Phi(k_n)^2 \\ \Phi(k_n)^{-2 \times 1} &= I_2 + nI_1 \cdot \Phi(k_n)^2 \\ \Phi(k_n)^{-2 \times 2} &= I_3 + nI_2 \cdot \Phi(k_n)^2 \\ &\vdots \\ \Phi(k_n)^{-2j} &= I_{j+1} + nI_j \cdot \Phi(k_n)^2 \end{aligned} \quad (7.34)$$

であると記述できる。その等角螺旋の重み付けのための数列構造は Fibonacci 数列を拡大解釈した

$$\begin{aligned} I_0 &= 0 \\ I_1 &= 1 \\ I_{j+2} &= I_{j+1} + nI_j \end{aligned} \quad (7.35)$$

と表記できる。

余談になるが、本報を投稿した大阪工業大学の宮キャンパスにある図書館には、昭和から平成に移り変わる在学生の頃から何度も昇り降りし、在学当時は本学の中でもデザインが一際斬新であった螺旋階段がある。当時は、インターネットで文献を調べる手段がなく、図書館の螺旋階段は研究に必要な文献調査のゲートウェイであった。長年の研究生生活を

支えてくれ、本報の螺旋構造の解明を求めた著作に関わる重要な資料としてその写真(2020年9月現在のもの)を図—8に添付する。

また、大学院生の頃に師匠の中易秀敏先生から沢山激励を受けて論文を渡され、当時は誰もが使えたわけではないソフトウェア *Illustrator* と *Mathematica* を与えていただき、原点から確率点までの距離が大事だと標準正規分布の幾何学について徹底的に鍛えていただいたことを思い出す今日此頃である。今回の創作活動もまた感謝しながらこのスタイルを貫いて探求したことを師匠と弟子の師弟関係を持つ若い世代のために付記しておきたい。

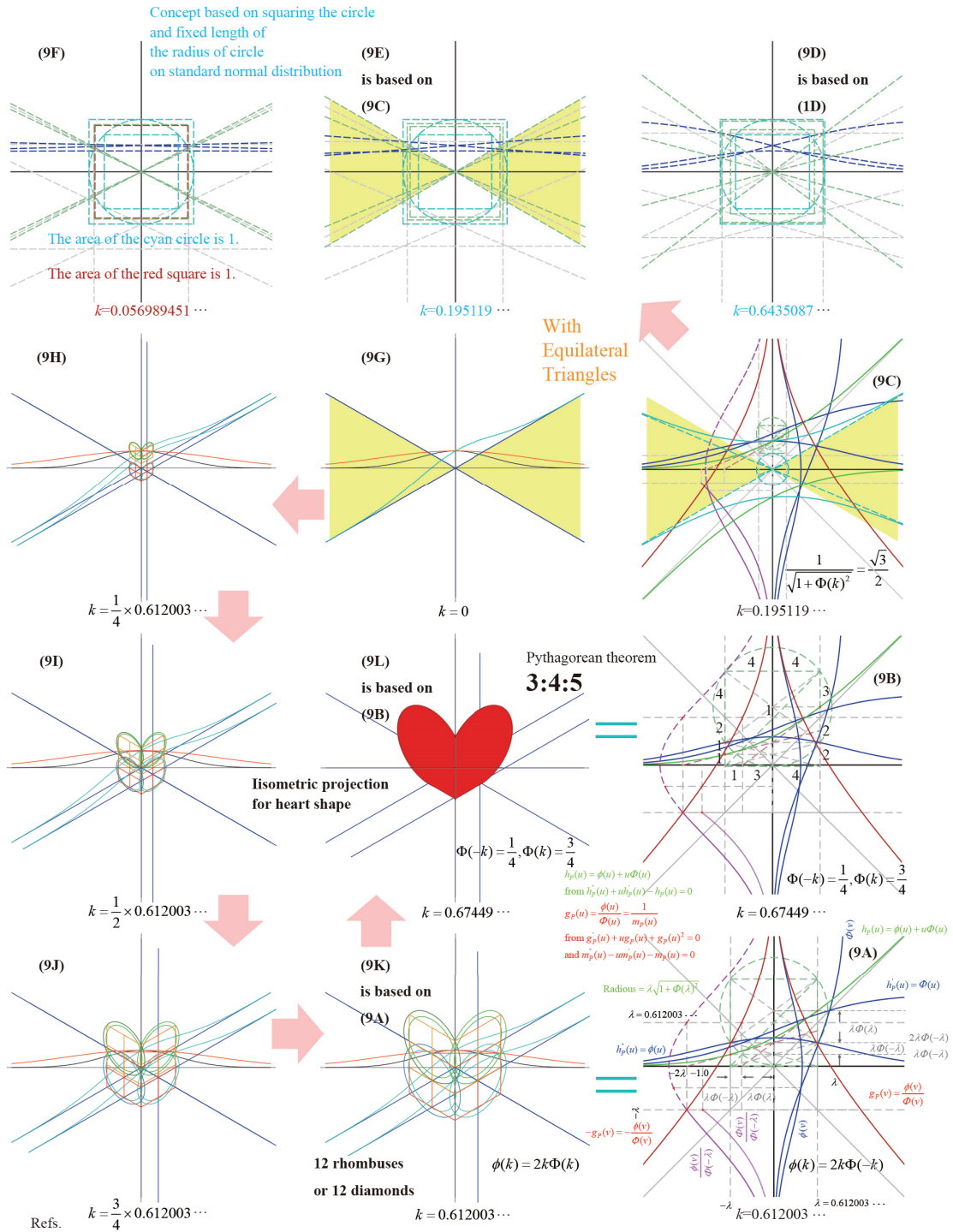
$n = 1$ では、黄金比の平方による解釈からはじまり、螺旋問題を取り扱う中で白銀比、青銅比、白金比が得られる類似比が見つかり、 $n = 12$ では、比率こそ 2:1 で平凡であり、実際には肉眼で見ることができない確率点 $k_{12} = 0$ ではあるが、正三角形を可視化した真の白金比のデザインが描けた。これが聖なる神秘的なのか科学技術の発展に役立つのかは著者には全く計り様もない。

とても美しいと感動し、感謝しながら描けた事実を公開して、図—8の(8C)には標準正規分布の確率点が零である確率密度関数の頂上と一緒に例示しておく。興味や関心がある読者は、 $n = 12$ が有する特徴について真の解明を行ってほしい。

8. 標準正規分布と円積問題と等角図法による正三角形の幾何学的特性

本章では、7章までと話題を変えて記述する。

図—9の(9A)から(9F)までの図¹⁾は、著者の先行研究の作品の一部を修正した引用である。標準正規分布に関するピタゴラスの定理(三平方の定理)を基礎に描いた図を比較しつつ発展させながら例示している。これらは標準正規分布の回転や拡がりの中で、本報の中心的な役割を果たしてきた円、三角形、正方形を結び付けた正三角形の作図を試行錯誤したときの成果である¹⁾。その過程と等角図の関係を明らかにするために図示したものである。標準正規分布に正方形が見つかった後³⁷⁾、本報までに円が描け、直角三角形が主役となってきた^{1,2)}。これらの先行研究の図を基にした図—9の(9A)から(9C)は、標準正規分布の縦横比(アスペクト比)を1に固定して確率点に基づいて、円と正方形が拡がりながら直角三角形を描いた図である。



Refs. S. Nakanishi and M. Ohnishi, "Rotationally Symmetric Relations of Standard Normal Distribution Using Right Triangles, Circles, and Squares -Ordinary Differential Equations, Pythagorean Theorem, Equilateral Triangles, and Golden Ratio - (Theory and Its Application of Mathematical Decision Making under Uncertainty and Ambiguity) ", RIMS Kôkyûroku, Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University, No. 2158, pp.171-183 (2020)
 中西真悟, <http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/english/img/nakanishi-2020-07-07-0612003-067449.gif>, (accessed 2020-07-07).
 中西真悟, "標準正規分布の幾何学的対称性 — 三平方の定理による累積確率評価 —", 大阪工業大学イノベーションデイズ 2020, <https://www.research.oit.ac.jp/sangaku/event/OITID-2020/seeds/seeds-4444/>, (accessed 2020-09-28).

図—9 ハート型 ($k = 0.67449 \dots$) と 12 個のダイヤモンド型 ($k = 0.612003 \dots$) を視覚化した標準正規分布, 円, 三角形, 正方形による等角図法の幾何学的特性と関連する円積問題の可視化
 Fig.9 Isometric Projections using Standard Normal Distribution, Circles, Triangles, and Squares with One Heart Shape and Twelve Rhombuses and These Visualizations between Normal Distribution and Squaring the Circle

一方で、逆に円を固定して正方形の拡がり正規分布の伸縮をイメージした図が図—9の(9D)、(9E)、(9F)¹⁾である。これらは円積問題²⁾を基礎に累積確率を描いたものであるが、やはり直角三角形や正三角形が重要な役割を果たす。

ところで、図—9の(9G)から(9L)は等角図法で作図したものである。図—9の(9K)は27パーセント・トルール⁴⁰⁾による図—9の(9A)を基に、図—9の(9L)は第3四分位確率(累積確率が75パーセント)による図—9の(9B)を基に、図—9の(9G)には傾きが $\pi/6$ となる正三角形を示す図—9の(9C)や(9E)¹⁾と対比して描いたものであり、円と正方形がそれぞれ楕円と菱形(ダイヤモンド型)にせん断される傾向を用いて拡がりを描いたものである。

特筆すべき点は、27パーセント・ルールに基づく確率点は、正規分布の名称の普及に貢献した英国のカール・ピアソンが約100年前に見つけた確率点 $k = 0.612003 \dots$ ^{1-5,40-42)}であり、その特徴について例示している。対称性を強調するかのように図—9の(9A)に示す正方形は、図—9の(9K)では12個の菱形(ダイヤモンド型)を強調して描ける。また、図—9の(9B)に示す3:4:5で有名な三角比のピタゴラスの定理(三平方の定理)ならびに第3四分位(累積確率が75パーセント)に相当する確率点 $k = 0.67449 \dots$ ^{1,2)}では、図—9の(9L)のようにハート型が描ける。非常に面白い魅力的な特徴なので、定番通り赤色でハート型を図示している。

6章と7章では確率が2分の1の場合(累積確率が50パーセント)の確率点 $k_{12} = 0$ を考察し、7章では第1四分位の場合(累積確率が25パーセント)の確率点 $k = -0.67449 \dots$ を取り扱い、本章では第3四分位(累積確率が75パーセント)の確率点 $k = 0.67449 \dots$ が出揃った。すなわち、本研究の幾何学的特徴は正規分布の対称性に関しても興味深い結果がそれぞれ得られた。

等角図法は、CGや図学に基づくせん断写像³⁸⁾を適用することで容易に描くことが可能である。その結果、一般にハート型は一つの関数式としても提案³⁹⁾もなされてきたが、こだわらなければデザインを作成する一手段として本報も活用できる。

また、エッシャーの作品⁴³⁾やペンローズの三角形⁴³⁻⁴⁴⁾のように錯覚を上手く応用したアニメーションではないが、図—9の(9G)から(9L)のように等角図法を用いるとき、同様に錯覚を描くことができる。再度記載するが、標準正規分布の等角図法の拡がりの

中に四分位の確率点 $k = 0.67449 \dots$ を用いて、図—9の(9B)に示す円と正方形から等角図法により楕円と菱形にせん断写像された結果、図—9の(9L)に1つのハート型が描けることは大変興味深い。加えて、10年以上に渡って研究してきた27パーセント・ルールに従う確率点 $k = 0.612003 \dots$ では、図—9の(9A)の正方形を図—9の(9K)に(3×4=)12個のダイヤモンド型として視覚化できた。

すなわち、円からは楕円を作図でき、正方形からは正三角形を基準に菱形(ダイヤモンド型)を視覚化でき、標準正規分布の等角図による表現方法の拡がり方を示す有効な幾何学的特徴を一例として示すことができた。

この一例を具体的に、著者の研究者HPに2020年7月7日付で図—9の(9G)から(9L)に関するアニメーションを例示したGIFファイルにより公開している^{45,46)}。

以上までの螺旋の考察を含むこれらの着想には、子供向けの著書である「算数おもしろ大事典—IQ」⁴⁷⁾や、「数の悪魔」⁴⁸⁾も大きく影響している。興味や関心のある読者は一度手に取られることをお勧めする。振り返ると、7章では $n = 12$ を用いた確率点 $k_{12} = 0$ において標準正規分布の確率密度関数の頂上に描けないはずの真の白金比としての正三角形の螺旋構造が可視化でき、本章でも等角図法による標準正規分布の拡がりの中にハート型が描けた。

最後に、図—9の中心にそのハート型が描けたので、愛の着想として聖書を引用したい。

「愛に根ざし、愛に基礎を置いているあなたがたが、すべての聖徒とともに、その広さ、長さ、高さ、深さがどれほどであるかを理解する力をもつようになり、人知を超えたキリストの愛を知ることが出来ますように。そのようにして、神の満ちあふれる豊さにまで、あなたがたが満たされますように(エペソ人への手紙)」⁴⁹⁾。

神の御業には程遠く^{50,51)}、人類の歴史の中で今回公表する成果もまた、神がご計画された世界ではほんの一部分が少し見えただけなのかもしれない。本報はコロナ過で延期になった研究会の代用として研究ノートを投稿したが、もし、読者が科学への関心や愛を表現する形が見え喜んでいただけたならば、この上なく幸せである。平安が訪れますように。

9. むすび

本報では、標準正規分布に三角形と正方形と貴金属比の類似比によるアプローチの着想で螺旋を考察し、同じ拡がりという着想から等角図法による作図も例示した。以下はその特徴である。

- (1) いくつかの有名な三角形の特徴を参考に標準正規分布にピタゴラスの定理に基づく代数螺旋と対数螺旋を考察した。
- (2) 代数螺旋では螺旋の軌道の仮説を行い、貴金属比や白金比と相性の良い類似比を提案した。これにより、標準正規分布の確率点が 0 もしくは ∞ である場合の螺旋も考察した。
- (3) 対数螺旋にも類似比を適用し、Fibonacci 数列と同様の考え方で白金比も含め貴金属比を考察する場合の結果を得ることができた。これらに関連する数列の数理的特徴も同時に例示した。
- (4) 円積問題による著者の正規分布の考え方として拡がるというイメージをまとめて例示し、等角図法に拡張した作図を例示した。このとき、意味ある確率点でハート型や 12 個の菱形 (ダイヤモンド型) を描けた。

謝辞 本報の前作研究¹⁾²⁾で、本学建築学科吉村英祐先生ならびに情報科学部の名誉教授亀島敏二先生から、大変有益な助言をいただき、今回も同じ発想で本作品を得たことを付記して謝意を記す。並びに読者から貴重なコメントを頂いたことを深謝する。

また、若い頃の恩師 中易秀敏先生から手書きの図をいただき、今回の発想を再考する機会につながったことを付記し、日本オペレーションズ・リサーチ学会でお世話になった皆様、日本証券アナリスト協会でお世話になった皆様、吹田聖書福音教会でお世話になった皆様をはじめ、多くの方々のご支援にも心から感謝したい。

参考文献

- 1) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Rotationally Symmetric Relations of Standard Normal Distribution Using Right Triangles, Circles, and Squares – Ordinary Differential Equations, Pythagorean Theorem, Equilateral Triangles, and Golden Ratio –”, 不確実・不確定性の下における数理的意思決定の理論と応用, 京都大学数理解析研究所講究録, No.2158, 2020, 171 頁-183 頁.
- 2) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Symmetric Relations and Geometric Characterizations about Standard Normal Distribution by Circle and Square”, The 15th International Symposium on Econometric Theory and Applications (SETA2019, 2019.6.1-2), Osaka University, Toyonaka, Osaka Prefecture, Japan, 第 15 回計量経済学の理論と応用に関する国際シンポジウム提出原稿, 大阪大学豊中キャンパス, http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/english/SETA2019-06-02Nakanishi_modified_paper.pdf (accessed 2019-06-05).
- 3) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Geometric Characterizations of Standard Normal Distribution – Two Types of Differential Equations, Relationships with Square and Circle, and Their Similar Characterizations –”, 不確実性の下での意思決定理論とその応用: 計画数学の展開, 京都大学数理解析研究所講究録, No.2078, 2018, 58 頁-64 頁.
- 4) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Geometric Characterizations of Standard Normal Distribution – Two Types of Differential Equations, Relationships with Square and Circle, and Their Similar Characterizations – (修正版)”, [http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/RIMS2078-10\(Modified-Version-on-November-22-2018\).pdf](http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/RIMS2078-10(Modified-Version-on-November-22-2018).pdf).
- 5) 中西真悟 (大阪工業大学), “手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭けにおけるすべての勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数との関係”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 第 55 巻, 2012, 1 頁-26 頁.
- 6) “Kepler triangle”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_triangle,
- 7) “Reuleaux triangle”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle,
- 8) “ルーローの三角形”, Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AB%E3%83%BC%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%81%AE%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>, (accessed 2020-09-15).
- 9) “Pascal's triangle”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle, (accessed 2020-09-15)
- 10) “Hosoya's triangle”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Hosoya%27s_triangle, (accessed 2020-09-15).

- 11) 細矢治夫, 「三角形の七不思議」, 講談社ブルーバック
クス, 2013.
- 12) 中村義作, 「代数を図形で解く 直感でわかる数学の
楽しみ」, 講談社ブルーバックス, 2000.
- 13) Yvonne Sortais et. al, 戸田アレクシ哲 訳, 「なぜ初等幾
何学は美しいか — 三角形幾何学」, 東京出版, 2002
- 14) Gary B. Meisner and Rafael Araujo, “The Golden Ratio:
The Divine Beauty of Mathematics”, 2018.
- 15) 岩本誠一・江口将生・吉良知文, “黄金・白銀・青銅
— 数と比と形と率と”, 経済学研究, 九州大学経済学会,
74 巻 4 号, 2007-12, 1 頁-19 頁.
- 16) Alexey Stakhov, and Samuil Aranson, “Golden"
Non-euclidean Geometry, The: Hilbert's Fourth Problem,
"Golden" Dynamical Systems, And The Fine-structure
Constant”, World Scientific, 2016.
- 17) “Golden ratio”, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio, (accessed
2020-09-15).
- 18) “黄金比”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91
%E6%AF%94](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E6%AF%94), (accessed 2020-09-21).
- 19) 牟田淳, 「デザインのための数学」, オーム社, 2010.
- 20) 柳井浩, 「黄金分割 — 自然と数理と芸術と—」, 共
立出版, 2005.
- 21) 柳亮, 「黄金分割 西洋の比例 ピラミッドからモダ
ン・アートまで (新装版 初版)」, 美術出版社, 2012.
- 22) 柳亮, 「続 黄金分割 日本の比例 法隆寺から浮世
絵まで (新装版 初版)」, 美術出版社, 2012.
- 23) “白銀比”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%99%BD%E9%8A%8
0%E6%AF%94](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%99%BD%E9%8A%80%E6%AF%94), (accessed 2020-09-21).
- 24) “Silver ratio”, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio, (accessed
2020-09-22).
- 25) “貴金属比”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%B2%B4%E9%87%91
%E5%B1%9E%E6%AF%94](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%B2%B4%E9%87%91%E5%B1%9E%E6%AF%94), (accessed 2020-09-22).
- 26) “白金比”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%99%BD%E9%87%91
%E6%AF%94](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%99%BD%E9%87%91%E6%AF%94), (accessed 2020-09-22).
- 27) “円積問題”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%86%E7%A9%8D
%E5%95%8F%E9%A1%8C](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%86%E7%A9%8D%E5%95%8F%E9%A1%8C), (accessed 2020-09-22).
- 28) “等角図法”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%89%E8%A7%9
2%E5%9B%B3](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%89%E8%A7%92%E5%9B%B3), (accessed 2020-09-22).
- 29) 岩井實, 石川義雄, 喜山宜志明, 佐久田博司, 「基礎応
用 第三角法図学 (第 3 版)」, 2019.
- 30) B. V. R. Gupta, and M. Raja Roy, “Engineering Drawing
(English Edition)”, I K International Publishing House,
2008.
- 31) “代数螺旋”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B
0%E8%9E%BA%E6%97%8B](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E8%9E%BA%E6%97%8B), (accessed 2020-09-22).
- 32) “Archimedean spiral”, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_spiral,
(accessed 2020-09-15).
- 33) “対数螺旋”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%BE%E6%95%B
0%E8%9E%BA%E6%97%8B](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%BE%E6%95%B0%E8%9E%BA%E6%97%8B), (accessed 2020-09-15).
- 34) “Logarithmic spiral”, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral, (accessed
2020-09-15).
- 35) Tomoyuki Mogi,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91
%E6%AF%94#/media/%E3%83%95%E3%82%A1%E3
%82%A4%E3%83%AB:TomoyukiMogi_GoldenRatio_S
ameAreas.gif](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E6%AF%94#/media/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:TomoyukiMogi_GoldenRatio_SameAreas.gif), (accessed 2020-09-23)
- 36) “Spiral of Theodorus”, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Spiral_of_Theodorus,
(accessed 2020-09-15).
- 37) 中西真悟, “手数料を考慮した株式ポートフォリオに
おけるアクティブ運用の不確実性”, 学位論文: 大阪
大学大学院経済学研究科経営学系専攻, 17777 号,
2015.
- 38) “せん断写像”, Wikipedia,
[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%81%9B%E3%82%93
%E6%96%AD%E5%86%99%E5%83%8F](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%81%9B%E3%82%93%E6%96%AD%E5%86%99%E5%83%8F), (accessed
2020-09-22).
- 39) “ハートの方程式”,
<http://zellij.hatenablog.com/entry/20111205/p1>, (accessed
2020-09-22).
- 40) Kelley, T. L., “The selection of upper and lower groups for
the validation of test items”, Journal of Educational
Psychology, Vol. 30, No.1, 1939, pp.17-24.
- 41) Pearson, K., “On the probable errors of frequency
constants”, Biometrika, Vol. 13, 1920, pp. 113-32.
- 42) Cox, D. R., “Note on grouping”, Journal of the American
Statistical Association, Vol. 52, No. 280, 1957, pp.
543-547.

- 43) “マウリッツ・エッシャー”, Wikipedia,
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9E%E3%82%A6%E3%83%AA%E3%83%83%E3%83%84%E3%83%BB%E3%82%A8%E3%83%83%E3%82%B7%E3%83%A3%E3%83%BC>
 (accessed 2020-11-21).
- 44) “ペンローズの三角形”, Wikipedia,
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9A%E3%83%B3%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%82%BA%E3%81%AE%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>,
 (accessed 2020-09-27).
- 45) 中西真悟, “標準正規分布, 円, 三角形, 正方形による等角図法によるハート形と12個のダイヤモンド形の可視化 (GIF ファイル)”, 大阪工業大学 中西真悟のHP,
<http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/english/img/nakanishi-2020-07-07-0612003-067449.gif>, (accessed 2020-07-07).
- 46) 中西真悟, “標準正規分布の幾何学的対称性 — 三平方の定理による累積確率評価 —”, 大阪工業大学イノベーションデイズ 2020,
<https://www.research.oit.ac.jp/sangaku/event/OITID-2020/seeds/seeds-4444/>, (accessed 2020-09-28).
- 47) 秋山久義 監修, 「算数おもしろ大事典—IQ」, 学研プラス, 2007.
- 48) ハンス・マグヌス エンツェンスベルガー, (丘沢静也 訳), 「数の悪魔—算数・数学が楽しくなる12夜」, 晶文社, 2000.
- 49) 新日本聖書刊行会, 「聖書 新改訳 2017」, いのちのことば社, 2018.
- 50) 三田一郎, 「科学者はなぜ神を信じるのか コペルニクスからホーキングまで」, 講談社ブルーバックス, 2018.
- 51) Mario Livio, (千葉敏生 訳), 「神は数学者か? 数学の不可思議の歴史」, 早川書房, 2017.