Memoirs of Osaka Institute
of Technology
Vol. 60, No. 1（2015） pp. 55～68

授業実践報告―ICT 活用の教育方法論
（授業前学修促進のために―「解析学Ⅰ」の事例から）

北　　秀　和

教務部　教育センター

(2015 年 5月 30日受理)

A Teaching Report：Education Methodology of ICT Utilization
(for Promoting Learning before Class—A Case Study of the *Analysis I*)

by
Hidekazu KITA
Education Center, Academic Affairs Department

Abstract

Recently, university students are confronted with a strong social request that they have to do long hours of study besides school. The author prepared frameworks to promote their learning before class of the last semester as follows:

(1) open learning materials on the Web with basic examples, solutions and maxima commands for solving them; (2) open tasks to be submitted before class, and a form mail script customized for the framework in order for submitting solutions on the Web site; (3) consider the tasks as those for academic assessment; (4) introduce the Web site with learning materials and that with maxima-online.

Looking back on the course of the trial in Math class of 2015, the author can determine the prepared frameworks, especially tasks of problem solving by maxima-online and the form mail are functioning effectively.

Based on this year's trial, the author aims to further improve the frameworks to promote active learning for students.

キーワード；授業前学修，maxima-online，web 学修素材，フォームメール，アクティブラーニング

Keyword; learning before class, maxima-online, learning materials on web, a form mail, active learning

１．　はじめに

授業時間は当然のこととして，授業以外にも時間を確保して学修活動に取り組むことが，以前にも増して，学生に強く求められている．いわゆる大学教育のグローバルスタンダードの観点が大きく作用していることは言うまでもなく，国策として進められていると言っても良いであろう[1)]．学修素材の事前配信，授業ビデオの事前視聴，反転授業など，授業前学修を前提としたアクティブラーニングは，授業外学修の重点的課題と言えよう[2)]．

1.1　大学数理科学系科目の授業前学修の課題

授業前学修を進めるということは，学修素材を何らかの形で学生に提供し，それを学生が指導者による直接的な指導なしに学修することで，学修内容について各自のイメージを形成し，授業に臨むようにすることである．各学生のイメージが異なったにしても，とにかく何らかのイメージを持って授業に臨み，授業の中で相互に交流することで望ましいイメージに近づいて行くものと期待されている．

一般論としてはそのとおりであろうが，特に，大学数理科学系科目のような定義から積み上げてゆく科目の場合，それなりの工夫が必要である．事前に配付されるテキストとグラフ，図表による説明により，指導者が期待するイメージに近いものを，学生が形成できないというリスクも結構高い．直接的な指導によっても，望ましいイメージを学生がなかなか持てないということが少なからず経験されるからである．

歴史的には，授業前学修の一形態である反転授業は初等・中等教育の算数数学教育から始まってきた[3)]が，大学教育においては，数理科学系科目というよりも，情報系科目において注目すべき成果が報告されている[4)]．

1.2　学生から見た数理科学系科目の授業前学修の課題

上記のことを，学生の立場からいえば，どのようにすれば授業前学修ができたことになるのか分からない，ということである．テキストを読んで，何が問題として設定され，解決された目指すべき目標がどのようなものか，イメージを持ちにくい．仮に，なんらかのイメージをもったにしても，それが適切なものに近いのか，それとも全くの勘違いなのか判断できないということである．

本学のような工業系大学においては何としても克服すべき課題といえよう．従来ならば，講義で説明し例題で解決方法を示した上で演習の時間を取って，設定されている状況を繰り返し学生になぞらせ，誤解が生じていればそれを指摘して学生の理解の促進を図ってきた，というところである．内容に通じたものに適宜アドバイスを受けなければ，そもそも問題そのものが学生にとって把握しにくい，という数理科学系科目の特性のためである．

２．授業前学修のための枠組みの設定

2.1　授業前学修の位置づけ

では，どうすれば，授業前学修を促進することができるか．

授業前学修の位置づけ，したがって，学習過程の設定を組み替えることがポイントとなる．

通常は，定義の理解から始まる．ところが，この定義自体が，数理科学系科目においては，解決すべき問題に合わせて作られている．言い換えれば，問題が解決できるように定義が定められている．解決すべき問題の状況がわからなければ，定義すらわからないというのが，実は根本的問題なのである．

そこで，何が問題かも分からないという状況から，解決すべき問題の輪郭がおぼろげながら感じたという段階を，授業前学修として位置づけるのである．ただし，おぼろげながらとはいっても，適切な理解に，確実に向かうための枠組み，いわば磁力とコンパスがなくてはならない．

そもそも，テキストを何度読んでも，単に読むだけでは，この輪郭をつかむのは難しいのである．これまでは，幾分なりとも指導者の説明を聞いてから，演習としてふさわしい問題を自分で解き，指導者の評価とアドバイスを得て，状況の理解を図ってきたのである．演習と指導者の評価・アドバイスが磁力とコンパスとなっていたのである．これを授業前学修としてどう実装するか，これが大きな課題となっている．

2.2 maxima-online の出現

ここに，maxima-online という強力で敷居の低い，使いやすいツールが登場した．高度な数学的処理を web 上でタブレットやスマートフォン（以下，「スマホ」と略す。）でも操作できるようになったのである[5)]．

maxima そのものの歴史は古い．フリーソフトとし

ても確かな評価を得てきたものである[6]．しかし，web 上のオンラインツールとして登場したのは比較的最近のことである．参考文献 6)には記述がなく，maxima-online の Privacy Policy には 2012 年 11 月 11 日更新の記載がある[7]．

スマホで操作できるという点が重要である．講義の中で，当該サイトに実際にアクセスして，簡単な処理を短時間に実感できるのである．学生には，電車や，バスの中で，ゲームをしているふりをして勉強したらどうかとも言っている．もちろん，数式の入力ではパソコンが遥かに有利である．スマホは，文字や数字はいいとして，＋や＝は数回のキー操作の後でようやく入力できる．タブレットでも同様である．しかし，授業の中で，短時間のうちに，実感することができるというのは，口頭あるいはテキストだけの説明とは，雲泥の違いである．

では，それを授業前学修でどう活用するのか．磁力とコンパスとしてどのように実装するのか．

2.3 授業前学修のための枠組み

・講義内容を簡潔に web 学修素材として公開

web 上の学修素材(以下，web 素材という．)は，授業の各回に対応したものとする．

その中に，基本的な例題を示し，その解と併せて，maxima のコマンドのよる解法を載せる(図－１)．

図－１　web 素材

・授業までに提出する課題とその提出用ツールを併せて公開

各回ごとに，その回の web 素材の学習状況のアンケートと併せて，授業までの課題として maxima-online で解くまとめの問題をのせる．

その上で，提出用ツールも web 素材に併せて公開しておく．フリーのフォームメールスクリプトにより実装している．

・最初の授業で，web 素材と maxima-online を紹介

スマホでアクセスさせ，サンプルコマンドを実行させる．

また，フォームメールの使い方をも紹介する．

その際，学生のメールアドレスの記入を求める．但し，模範解答の送付，質問への回答など，この授業に関することだけに用いることを指導者として約束し，メールアドレスの記載を望まない学生には，プリントアウトの用紙で提出しても構わないと伝える．

なお、スマホを持っていない学生には、「近くの学生の操作を見せてもらうこと．自分のパソコン操作の参考になる．」と指導する．

・授業までの課題の提出は，授業中の提出課題の一環として位置づけ，評価の対象とする．

このようにして，maxima-online をうまく活用することで，学生のもつイメージをより適切なものへと誘導する磁力とコンパスの役割を担わせることができると判断した．

３．授業学修の強調点と教材例

3.1 最初の授業での強調点

まず，最初の授業において，以下のことを強調する．

授業前学修として，web 素材を閲覧し，わかる範囲で理解を深め，記述してある maxima コマンドをとにかく実行してみること．

3.2「1 次関数，2 次関数」の例

「解析学Ⅰ」「第１章　1 次関数，2 次関数」の最初の maxima-online の例は，定数関数$y = 3$のグラフ表示である．

```
f:3;
plot2d(f,[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

とコマンド入力枠に入力し，Calculate ボタンをクリックする．

簡単な出力コマンドが，最初の一歩である．

3 という定数を f とする．
f を-5<x<5,-5<y<5 という範囲でグラフ表示する．

これが上記の maxima コマンドの意味である．しかし，コマンドの意味の説明は web 素材ではしていない．意味が分からなくても，ともかく実行してみて考えるという授業前学修の趣旨に慣れることをねらっていると強調する．

第２の例は，１ 次関数$y=2x+1$のグラフ表示である．

```
f:2*x+1;
plot2d(f,[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

第３の例は,２次関数$y=2x^2+4x-3$のグラフ表示である．

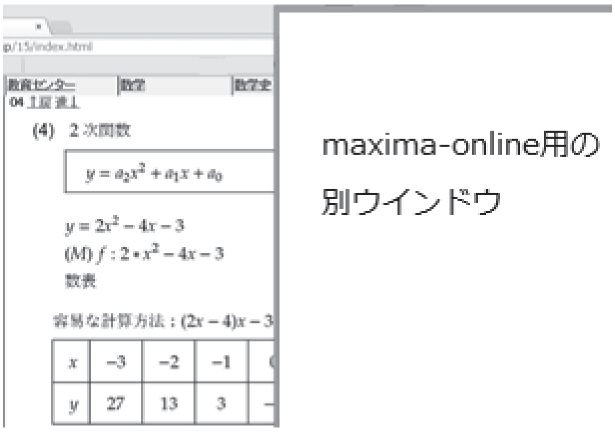
```
f:2*x^2+4*x-3;
plot2d(f,[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

である．

これだけ繰り返すと，コマンドの意味は自ずと推測されよう．

記述してあるコマンドを実行すること自体は，さほど大きな作業とは思われないが，:と;を間違えただけで，maxima-online はエラーを返す．上記の例で学生がよく陥る誤りは，2*x と入力すべきところを 2x と入力することである．したがって，長いコマンド列を実行させる場合は，１コマンドを実行させ，うまく行ったら次のコマンドを書き加えて実行し，誤りがあれば訂正して再度実行することを繰り返すことをことあるごとに強調する．

web 素材のウインドウと別に maxima-online のウ



図－２　web 素材と並置した maxima-online

インドウを開いておき，web 素材を参照しながら maxima-online に入力して実行するなど，要領よく実行するためのチップスも，適宜指導している(図－２)．

3.3　「逆関数」の例

「逆関数」の例の第１は，１ 次関数$y=2x+1$の逆関数である．

```
f:2*x+1;
g:solve(y=f,x);
g:subst(y=x,rhs(g[1]));
h:subst(x=f,g);
```

とコマンド入力する．

2*x+1 という１次式を f とする．
y=f，即ち，y=2*x+1 という方程式を，x について解いて,その結果を g とする.この時点で,g は[x=(y-1)/2]となっている．
g の第１項,即ち,x=(y-1)/2 の右辺について,y に x を代入し，その結果を g とする．この時点で g は(x-1)/2 となっている．
g の x に f を代入したものを h とする．この時点で，h は x となっている．

これが上記の maxima コマンドの意味である．

ここでも，solve，subst，rhs などの説明は一切なしに，学生は取り組めるようになることをねらっている．こういう作業に慣れておくことが，今後の学修能力を高めることになる．結果を見て，何かに気づき省察するのである．これが自分自身で見つけた問であり，答となる．理解が不十分でも，全く分からなくても，例に倣って実行してみて反省，考察することができるのは，学力の一つであることを繰

次の例は，$y=2x^2-4x-3\quad(x\geq 1)$の逆関数である．

```
f:2*x^2-4*x-3;
g:solve(y=f,x);
g:rhs(g[2]);
g:subst(y=x,g);
h:subst(x=f,g);
h:radcan(h);
```

2*x^2-4*x-3 という 2 次式を f とする．
y=f，即ち，y=2*x^2-4*x-3 という方程式を，x について解いて，その結果を g とする．この時点で，g は[x=-(sqrt(2)sqrt(y+5)-2)/2, x=(sqrt(2)sqrt(y+5)+2)/2]となっている．
g の第 2 項，即ち，x=(sqrt(2)sqrt(y+5)+2)/2 の右辺を改めて g とする．これは x>1 による．
g の y に x を代入し，その結果を改めて g とする．
g の x に f を代入したものを h とする．
h を可能な限り簡単にして，改めて h とする．
この時点で，h は x(恒等関数)となっている．

これが上記の maxima コマンドの意味である．

記述してあるコマンドを正しく入力して実行すると，maxima-online は図－３のメッセージを返す．

```
(%i1) f:2*x^2-4*x-3;
                                       2
(%o1)                               2 x  - 4 x - 3
(%i2) g:solve(y=f,x);
                   sqrt(2) sqrt(y + 5) - 2
(%o2)    [x = - -----------------------
                             2

                           sqrt(2) sqrt(y + 5) + 2
                     , x = -----------------------]
                                      2

(%i3) g:rhs(g[2]);
                            sqrt(2) sqrt(y + 5) + 2
(%o3)                       -----------------------
                                       2
(%i4) g:subst(y=x,g);
                            sqrt(2) sqrt(x + 5) + 2
(%o4)                       -----------------------
                                       2
(%i5) h:subst(x=f,g);
                                  2
                   sqrt(2) sqrt(2 x  - 4 x + 2) + 2
(%o5)              --------------------------------
                                  2
(%i6) h:radcan(h);
(%o6)                                    x
```

図－３　maxima-online のメッセージ(逆関数)
(印刷枠に収まるよう部分修正．以下，同様)

敢えて繰り返すが，入力作業をして結果を得ることで，学生は何かに気付く．この省察が学修の第一歩である．これを大事にしたい．

web 素材の中に記載されていても，学生の多くは，最終的に出力された x に何の意味を見出すべきか戸惑うであろう．しかし，この戸惑いを授業前に体験しておくことが，授業において指導者が逆関数の本質として強調すること，すなわち，元の関数との合成が恒等関数となることを，学生が素直に納得できるための素地となるのである．

3.4 「平行移動，対称移動」の例

「平行移動，対称移動」の例の第１は，2 次関数 $y = 2x^2 + 4x - 1$のグラフをx軸方向に1，y軸方向に3平行移動したものをグラフとする関数を求めるものである．

```
f:y=2*x^2+4*x-1;
g:subst([x=x-1,y=y-3],f);
h:ratsimp(g);
h1:h+3;
```

記述してあるコマンドを正しく入力して実行すると，maxima-online は図－４のメッセージを返す．

```
(%i1) f:y=2*x^2+4*x-1;
                                     2
(%o1)                         y = 2 x  + 4 x - 1
(%i2) g:subst([x=x-1,y=y-3],f);
                                                    2
(%o2)          y - 3 = 4 (x - 1) + 2 (x - 1)  - 1
(%i3) h:ratsimp(g);
                                          2
(%o3)                          y - 3 = 2 x  - 3
(%i4) h1:h+3;
                                          2
(%o4)                              y = 2 x
```

図－４　maxima-online のメッセージ
(グラフの移動)

(%i3)の ratsimp というコマンドは，有理式(今の場合は多項式)を可能な限り簡単にするというものである．

3.5 「授業までの課題」とフォームメール

前節のような課題に取り組んだ上で，まとめとして，「授業までの課題」に取り組むようにしてある．

第１章の場合は，次のようになっている．

［1］　授業前学修に要した時間(単位：分)
［2］　納得できた項目の番号
［3］　納得しにくい項目の番号
［4］　図形$y = 2x^2 + 4x - 1$をx軸対称に移動し，その後，x軸方向に3，y軸方向に1平行移

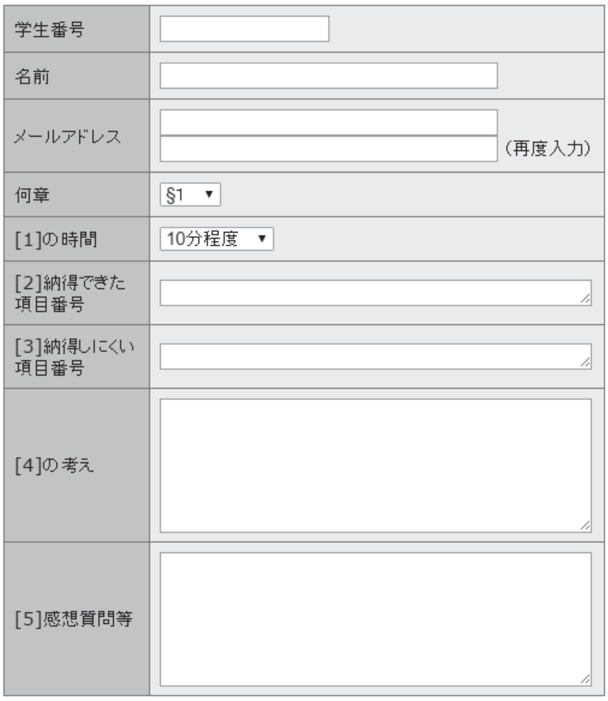
動する．その図形の方程式を求めよ．

[5]　その他，感想，質問．

学生は，これをフォームメールにより提出する．

フォームメールの入力項目は，以下のとおりである(図－５)．

・学生番号(記入式)
・名前(記入式)
・メールアドレス(記入式)
・何章(§１～１５の選択式)
・[1]の回答(１０分程度～１時間以上の１０分単位の選択式)
・[2]の回答(項目番号の記入式)
・[3]の回答(項目番号の記入式)
・[4]の回答(記入式)
・[5]の回答(記入式)



図－５　メールフォーム

４．2015 年度前期前半の試験運用の取り組み

以上の仕組みの運用に当たって，2015 年度は試験運用とし，以下のようにして取り組んでいる．

(1)　第１週の授業で，シラバスの説明と併せて，パソコンとプロジェクタにより，web 素材のページ，maxima-online を紹介した．

・学生に各自のスマホを操作して，web 素材のページにアクセスするように指示した．ほぼ全員がスマホを操作していた．なお，スマホを持っていない学生には、「近くの学生の操作を見せてもらうこと．そうすることで，自分のパソコン操作の参考になる.」と伝えた．

・更に，maxima-online にアクセスするように指示し，maxima-online にデフォルトで記入されているサンプルコマンドを実行するために，Calculate をタッチするよう指示し，結果出力を各自のスマホで確認させた．

・教材 web ページに戻り，第１章の記述を簡潔に紹介し，授業前学修として，閲覧しておくこと，maxima のコマンドが記載されているものは，maxima-online で実行してみること，授業までの課題に取り組みフォームメールにより回答することを指示した．

・フォームメールの画面に入り，提出の要領を説明した．

[4]の回答は，基本的には，maxima-online に入力して，Calculate の結果出力されたテキストのコピーを，回答枠にペーストし，解答として必要な事項があれば書き加える．

提出は，フォームメールで提出することを基本としている．

フォームメールは，筆者に割当られた大学のメールアドレスに届き，課題の正解，質問への回答等を学生のメールアドレスに返信する．

特に，個人情報の取り扱いとして，このメールの内容，各学生のメールアドレスは，模範解答や質問等への回答など，この授業に関することだけに用いることを担当者として約束した．それでもメールアドレスを知られたくない学生は，レポート用紙に記入して授業の初めに提出しても良いこととした．

(2)　授業までの課題も，試験運用として，授業終了週の次週の土曜日まで，課題の提出を受け付けること，講義と演習と両方の授業がある場合でも提出は一方だけで良いこととした．

(3)　パソコン，プロジェクタによる例示は，授業までの課題に関連する 1,2 例のみ授業開始直後の 10 分程度で行うに止める．細部に渡る解説は行わず，web 素材の例示に倣って maxima-online に学生自身が取り組んでみてから振り返って考えることが大事であると，繰り

替えし強調した.

５．試験運用の結果と考察

5.1　敷居が低い maxima-online

2014 年度も，パソコン用の maxima を紹介し，プロジェクタを使って maxima を使った学修内容の説明を行うなど，大いに授業で maxima を紹介してきたが，maxima に取り組んだ学生は，筆者が把握した範囲で皆無であった．また，授業までの課題も[4]の内容は通常の(maxima を用いない)問題であったが，成績評価の対象とすると伝えていたにもかかわらず，フォームメールあるいはレポート用紙による提出は約 12%であった．

これに対して，2015 年度前期前半の提出率は 81%と大いに向上し，しかも maxima-online で取り組んでいるものが 56%とかなりの割合を占めている．

このことから，スマホ，タブレットで活用でき，インストールの必要のない maxima-online が学生にとって利用しやすいものであることが実証された．

5.2　学修内容に則したコマンド例示の有効性

2014 年度は,授業中に maxima や Geogebra を用いて,学修内容を説明してきたが,web 素材には maxima や Geogebra のコマンドを記載しなかった．

これに対して，2015 年度前期前半は，学修内容に則して，maxima のコマンドを例示した(図－６)．特段のコマンド解説までは web ページで行っていないが，例示に倣って maxima-online で実行してみている学生の回答が前述したとおり多かった．

2)　２次関数の逆関数

$y = 2x^2 - 4x - 3 \quad (x \geq 1)$

● x について解く

$2x^2 - 4x + (-3 - y) = 0$

$x = \frac{1}{4}(4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2(-3 - y)})$

$= \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{2y + 10})$

y に対して２つの x が対応できない

$\rightarrow x \geq 1$ の条件

$f : 2 * x^2 - 4 * x - 3$

$g : solve(y = f, x)$

● $x \geq 1$ により，$x = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2y + 10})$

$g : rhs(\%[2])$

図－６　web 素材中の maxima コマンド

Maxima-online を利用して学修内容に取り組んで行くに際して，学修内容に則した maxima のコマンドを例示することは，コマンドの直接的な解説がなくても，有効であることを示している．

5.3　maxima-online による授業前学修の可能性

前節までの結果は，maxima-online による授業前学修が可能であることを示すものでもある．学修内容が理解できていなくても，例に倣って練習問題に取り組むことが，大学の授業では不可避であり，小中学校や高校の勉強のイメージにとらわれていてはいけないと，繰り返し強調してきた結果でもあるが，このスタイルの学修に，学生が取り組んで行けることが実証された．

なお，maxima による数学(微積分，線形代数等)を解説する市販本は少なからずあり[8]，web 上にも数学に関係させてコマンドを紹介するサイトはあるが[9]，大学数理科学系科目の授業前学修について maxima-online の活用に関するものは，管見にして見当たらなかった．

5.4　試験運用で得られた授業前学修の事例

学修内容が理解できていなくても，例に倣って練習問題に取り組むことが，どの程度可能か，具体的事例を示す．

高校での学習内容に含まれていない事例として，三角関数のマクローリン近似に関するものを取り上げる．

本学「解析学Ｉ」の第５章は，三角関数の加法定理に関わる内容である．これと関わって，$\frac{5}{12}\pi$の三角関数の値を加法定理により求めるという課題がある．これを更に発展させると，任意の角の三角関数の値を近似的に任意の精度で求めるという課題が射程に入ってくる．これを第５章の授業までの課題とした．

> sin(%pi/6+%pi/24)の値を，sin(%pi/6+x)のべき級数で求めるときの maxima のコマンドとその値を求めよ．

web 素材には，$\sin(\frac{\pi}{6}+x)$の 7 次の近似式と$x=\frac{\pi}{12}$のときの値の求め方,そのmaximaのコマンドが,もちろん例示してある．それは，以下のようになっている．

```
f:taylor(sin(%pi/6+x),x,0,7);
f1:subst(x=%pi/12,f);
v:float(f1),numer;
abs(v-sin(%pi/6+%pi/12));
```

$\sin(\frac{\pi}{6}+x)$を$x=0$において 7 次の項までテーラー展開（べき級数展開）したものを f とする．

f のxに$\frac{\pi}{12}$を代入したものを f1 とする．

f1 を小数値計算した値を v とする．この時点で，v は$\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})$の近似値になっている．

v と$\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})$との差を求める．

これが，上記の maxima コマンドの意味である．

なお，最後のコマンドは，

abs(v-sin(%pi/6+%pi/12)),numer;

として，v と$\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})$との差を小数値として求めるとすべきものであった．

例示してあるコマンドに倣って，$x=\frac{\pi}{24}$ の場合を求めよというのが，授業までの課題[4]の趣旨である．筆者の「解析学 I」の授業では，折に触れて，学生がよく見かける関数はべき級数展開が可能である，「解析学 II」以降の講義で学ぶことになる，と伝えている．とはいっても，具体的なべき級数の求め方を指導したわけではなく,maxima のコマンドとして特に教示したこともない．実質的に web 素材の中に記載があるだけであって，学生にとって初めての内容であることはまず間違いない．

学生からフォームメールで回答された２例を示す．

図－７を回答した学生は，「４」を見ると，着実に例に倣っている．

```
時間 = 30m↓
「２」 = ０７↓
「３」 = １２↓
「４」 = ↓
(%i1) f:taylor(sin(%pi/6+x),x,0,7);↓
                                 2            3↓
         1   sqrt(3) x    x    sqrt(3) x ↓
(%o1)/T/ - + --------- - -- - ----------↓
         2       2        4       12     ↓
↓
      4           5     6            7↓
     x    sqrt(3) x    x    sqrt(3) x↓
   + -- + ---------- - ---- - ----------↓
     48      240       1440     10080↓
                                 + . . .↓
(%i2) f1:subst(x=%pi/24,f);↓
                  7                   6     ↓
               %pi                 %pi      ↓
(%o2) - ---------------- - ------------ ↓
                    17/2   275188285440 ↓
        2348810240 3                    ↓
↓
              5            4          3↓
           %pi          %pi        %pi↓
     + ------------- + -------- - ---------↓
                 11/2  15925248          7/2↓
       2621440 3                   2048 3↓
↓
                          2↓
                       %pi        %pi       1↓
                     - ---- + ---------- + -↓
                       2304   16 sqrt(3)   2↓
(%i3) v:float(f1),numer;↓
(%o3)                    0.60876142900762↓
(%i4) abs(v-sin(%pi/6+%pi/24));↓
                  5 %pi↓
(%o4)         sin(-----) - 0.60876142900762↓
                   24↓
「５」 = べき級数展開は今までで一番数学的で
楽しかった。↓                                ↓
```

図－７　メールフォームによる回答１

ただし,(%i4)も web 素材にそのまま倣ったため,(%o4)は何も計算されずに出力されている．本来ならば,

abs(v-sin(%pi/6+%pi/24)),numer;

として，真の値とべき級数で求めた値との差を評価計算すべきところであったのである。直前の(%i3)にある numer をこの場合にも試してみようとまでは考えなかったようである。

なお，この学生は，web 素材のこの章について，

「１」学修時間は 30 分程度

「２」納得できた項目は「$\sin\left(p \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos p$ など」のページ

「３」納得しにくい項目は「$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$の近似」のページ

「５」感想は，「べき級数展開は今までで一番数学的で楽しかった.」

としている．べき級数展開に興味をもったが，$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$の近似との関係については，まだピンとこないということのようである.

例に倣うだけだから，たいていの学生ができるかといえば，実際はそうではない．多く見られた回答は，図－８のようなものである.

```
時間 = 20m↓
「２」 = 3↓
「３」 = 11↓
「４」 = ↓
(%i1) f:sin(%pi/6+%pi/24);↓
                                  5 %pi↓
(%o1)                          sin(-----)↓
                                   24↓
(%i2) f:sin(%pi/6+x);↓
                                    %pi↓
(%o2)                        sin(x + ---)↓
                                     6↓
(%i3) f:trigexpand(f);↓
                  sqrt(3) sin(x)   cos(x)↓
(%o3)             -------------- + ------↓
                        2            2↓
(%i4) ↓
「５」 = むずかしい。。。↓
```

図－８　メールフォームによる回答２

図－８を回答した学生は，「４」を見ると，高校までの習慣にとどまり，べき級数展開でという指示には目をつぶって，加法定理で展開して値を求めようとしたのである.

この学生であっても，自分なりにこの課題に取り組んだ意義は大きいと筆者は判断する.

まず，(%i1)で直接 f:sin(%pi/6+%pi/24)；としてみたが，maxima-online は sin(5 %pi/24)とするだけで，値を返さなかった.

そこで，(%i2)で，f:sin(%pi/6+x)；として，(%i3)で加法定理の展開を試みた．加法定理の展開は，trigexpand というコマンドを用いるということに気が付いている.

その結果として maxima が出力したところでとまってしまった．この式に，$x=\frac{\pi}{24}$を代入する subst というコマンドに気が付かなかったか，あるいは，$\frac{\pi}{24}$の三角関数の値がわからないということに気がついて代入しても意味がないと判断したか，何れとも判断できないが，少なくとも加法定理では課題解決できないという体験をしたことは間違いない．maxima-online を利用すれば，自分のアイデアによって課題を可能なところまで追求することができるという意義が確かに認められる.

さらに，この学生については，$x=\frac{\pi}{24}$ として代入計算できる式を求めないと課題解決できない，と指導すれば，それを受け入れる素地がかなりできていると判断できる.

ここまでを，授業前学修として実現できていれば，その後を授業で補正していくことは随分と容易になると言えるであろう.

なお，この学生は，web 素材のこの章について，

「１」学修時間は 20 分程度

「２」納得できた項目は「$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$の値を加法定理で求める」ページ

「３」納得しにくい項目は「$\tan\theta=\frac{4}{3}$から$\sin\theta$などの値を求める」のページ

「５」感想は，「むずかしい。。。」

としている.

以上の 2 例からも，maxima-online による授業前学修の可能性は十分にあると判断できる.

5.5　授業前学修とリンクした授業の事例

授業前学修の試験運用にあたり，本年度の授業においては，数理科学系科目の授業外学修において maxima-online の活用の有用性を学生が実感できるという点に力点をおいた.

本学の「解析学 I」は，複数の担当者が同一のテキストを用い，定期考査も同一問題で実施している.

このことを前提として，maxima-online の活用の有用性について，担当者の裁量の許される範囲で，付加的に指導することとなる．

そこで，第１には，学生にとって間違いやすい複雑な計算を，正しく実行できたかどうか，間違ったとすれば，どこで間違ったかを見極めるツールとして，第２には，思いついた解法が適切なものかどうかを見極めるツールとして，授業において例示する．その上で，第３に，授業前学修で学生が得た素地を生かす指導例を紹介する．

第１の例としては，$\dfrac{\sqrt[3]{a^5b}}{\sqrt{ab^{-3}}}$ を簡単にし，指数を使ってあらわす場合をあげる．

maxima-online で次のように入力すると，計算の途中も含めて，確認できる．

```
f:a^5*b;
f1:f^(1/3);
f2:radcan(f1);
g:a*b^(-3);
g1:1/sqrt(g);
g2:radcan(g1);
f3:f2*g2;
```

a^5bを f とする．

$(\mathrm{f})^{\frac{1}{3}}$を f1 とする．

f1 をできるだけ簡単にして f2 とする．

ab^{-3}を g とする．

$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}$を g1 とする．

g1 を可能な限り簡単にして g2 とする．

f2*g2 を f3 とする．

これが上記の maxima コマンドの意味である．

このとき，maxima-online は，図－９のように出力する．

(%o2) が与式の分子である．この部分の計算が合っているか，最初に確認する．

(%o4) が与式の分母の根号の中であり，(%o6) が求める解の (%o4) に対応する因子である．$\frac{1}{\mathrm{sqrt(a)}}$を maxima は通常$a^{-\frac{1}{2}}$と出力しない．$\frac{1}{\mathrm{sqrt(a)}}$を，問題の趣旨にあわせて$a^{-\frac{1}{2}}$と読み，この部分の計算が合っているか，次に確認する．なお，ここで$\frac{1}{\mathrm{sqrt(a)}}$を$a^{-\frac{1}{2}}$と読める力が maxima-online を使う場合に要求されることを学生に強調した．

(%o7) が，求める解である．これが最後に確認する部分である．

```
(%i1) f:a^5*b;
                                    5
(%o1)                              a  b
(%i2) f1:f^(1/3);
                                  5/3  1/3
(%o2)                            a    b
(%i3) f2:radcan(f1);
                                  5/3  1/3
(%o3)                            a    b
(%i4) g:a*b^(-3);
                                    a
(%o4)                              --
                                    3
                                   b
(%i5) g1:1/sqrt(g);
                                    1
(%o5)                           --------
                                     a
                                sqrt(--)
                                      3
                                     b
(%i6) g2:radcan(g1);
                                   3/2
                                  b
(%o6)                            -------
                                 sqrt(a)
(%i7) f3:f2*g2;
                                 7/6  11/6
(%o7)                           a    b
(%i8)
```

図－９　maxima による指数計算

第２の例としては，

$$\cos a - \cos b = -2\left\{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right\}$$

を証明するのに，右辺を加法定理で展開することから始めてはどうかと考えて，可能かどうかを試行して見極める場合をあげる．

maxima-online で次のように試行するのである．

```
f:sin(a/2+b/2);
g:sin(a/2-b/2);
f1:trigexpand(f);
g1:trigexpand(g);
fg:f1*g1;
fg1:expand(fg);
```

```
fg2:subst(sin(a/2)^2=(1-cos(a))/2,fg1);
fg3:subst(sin(b/2)^2=(1-cos(b))/2,fg2);
fg4:subst(cos(a/2)^2=(1+cos(a))/2,fg3);
fg5:subst(cos(b/2)^2=(1+cos(b))/2,fg4);
expand(fg5);
```

$\sin(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})$を f とする.

$\sin(\frac{a}{2}-\frac{b}{2})$を g とする.

f を加法定理で展開して，f1 とする.
g を加法定理で展開して，g1 とする.
f1*g1 を fg とする.
fg を代数的に展開して，fg1 とする.

fg1 の$(\sin(\frac{a}{2}))^2$を$\frac{1-\cos(a)}{2}$として，fg2 とする.

fg2 の$(\sin(\frac{b}{2}))^2$を$\frac{1-\cos(b)}{2}$として，fg3 とする.

fg3 の$(\cos(\frac{a}{2}))^2$を$\frac{1+\cos(a)}{2}$として，fg4 とする.

fg4 の$(\cos(\frac{b}{2}))^2$を$\frac{1+\cos(b)}{2}$として，fg5 とする.

fg5 を代数的に展開する.

これが上記の maxima コマンドの意味である.

このとき，maxima-online は，図－１０のように出力する.

(%o6)が右辺の各因子を加法定理で展開して，さらに多項式として展開したものである.

ここで，証明すべき式の左辺を見ると，$\cos a$，$\cos b$ だけの式だから，半角公式によって変形したらよいのではないかと，試したくなる．それが，(%i7)～(%i10)の代入であり，その結果，(%o10)が出力される．これを，展開整理したらよいのではないかと考えて，展開したものが(%o11)である.

これを-2倍すれば，与式の右辺となるから，当初の方針で証明できることがわかる.

maxima-online を使うと,計算違いはない.ただ,利用する側が意図するところをmaxima-onlineに確実に伝えることができるかどうか，maxima-online の出力結果を利用者側が自分の意図に合わせて評価できるかどうかが問題となる．うまく活用するには，数学的思考力を働かせて，maxima-online を使い込まなくてはならないことを学生に話した.

こうした活用例を，可能な限り授業で紹介したいところであるが，時間的にも設備的にも制約があって，授業の開始直後に，1，2 例を紹介するにとどめざるを得なかった.

```
(%i1) f:sin(a/2+b/2);
                                      b   a
(%o1)                             sin(- + -)
                                      2   2
(%i2) g:sin(a/2-b/2);
                                       b   a
(%o2)                           - sin(- - -)
                                       2   2
(%i3) f1:trigexpand(f);
                           a       b        a       b
(%o3)                  cos(-) sin(-) + sin(-) cos(-)
                           2       2        2       2
(%i4) g1:trigexpand(g);
                           a       b        a       b
(%o4)                  sin(-) cos(-) - cos(-) sin(-)
                           2       2        2       2
(%i5) fg:f1*g1;
              a       b        a       b
(%o5)    (sin(-) cos(-) - cos(-) sin(-))
              2       2        2       2
                           a       b        a       b
                      (cos(-) sin(-) + sin(-) cos(-))
                           2       2        2       2
(%i6) fg1:expand(fg);
                    2 a      2 b       2 a      2 b
(%o6)            sin (-) cos (-) - cos (-) sin (-)
                      2        2         2        2
(%i7) fg2:subst(sin(a/2)^2=(1-cos(a))/2,fg1);
                              2 b
              (1 - cos(a)) cos (-)
                                2           2 a      2 b
(%o7)         -------------------- - cos (-) sin (-)
                       2                    2        2
(%i8) fg3:subst(sin(b/2)^2=(1-cos(b))/2,fg2);
                            2 b        2 a
         (1 - cos(a)) cos (-)     cos (-) (1 - cos(b))
                            2          2
(%o8)    --------------------  -  --------------------
                  2                        2
(%i9) fg4:subst(cos(a/2)^2=(1+cos(a))/2,fg3);
                                  2 b
               (1 - cos(a)) cos (-)
                                  2
(%o9)          --------------------
                        2
                            (cos(a) + 1) (1 - cos(b))
                          - -------------------------
                                        4
(%i10) fg5:subst(cos(b/2)^2=(1+cos(b))/2,fg4);
                (1 - cos(a)) (cos(b) + 1)
(%o10)          -------------------------
                            4
                            (cos(a) + 1) (1 - cos(b))
                          - -------------------------
                                        4
(%i11) expand(fg5);
                                       cos(b)   cos(a)
(%o11)                                 ------ - ------
                                         2        2
```

図－１０　maxima による三角関数の等式変形

それでも，意欲のある学生にとっては，貴重な例

示となったことは間違いない．

第３の例としては，指数関数と対数関数が互いに逆関数であることについての指導を紹介する．

web 素材には，$y=\log_a x$が$y=a^x$の逆関数だから，$a^{\log_a x}=x,\quad \log_a a^x=x$ としてある．

例えば，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ならば，$y>0$であって，単調減少だから，任意の$x$と任意の$y>0$は１対１に対応している．

よって，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は，x について解けて，その解を$x=\log_{\frac{1}{2}} y$とした．

ここで，定義域をx ，値域をy とするために，xとyを入れ替えたもの，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$を$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の逆関数といっている．

web 素材には，次いで，maxima コマンド

```
logv2(x):=log(x)/log(1/2);
radcan((1/2)^(logv2(x)));
radcan(logv2((1/2)^x));
```

が載っている．

log(x)/log(1/2)を関数 logv2(x)と定義する．
log(1/2)x の定義である．
(1/2)^(logv2(x))を可能な限り簡単にする．
logv2((1/2)^x)を可能な限り簡単にする．

これが上記の maxima コマンドの意味であると軽く触れる．記述してあるコマンドを正しく入力して実行すると，maxima-online は次のようなメッセージを返す．（図－１１）

```
(%i1) logv2(x):=log(x)/log(1/2);
                                 log(x)
(%o1)               logv2(x) := ------
                                    1
                                 log(-)
                                    2
(%i2) radcan((1/2)^(logv2(x)));
(%o2)                               x
(%i3) radcan(logv2((1/2)^x));
(%o3)                               x
(%i4)
```

図－１１　maxima による逆関数の確認

後ろ２つのコマンドに対する maxima-online の回答はともに x である．

この数学的意味は何か．第１章にもあった通り，$f(x)$の逆関数が$g(x)$であることを数学的には

$$f\cdot g(x)=x,\quad g\cdot f(x)=x$$

で定義しているからである．後ろ２つの数学的意味は，数学的定義に基づいて$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の逆関数が$y=\log_{\frac{1}{2}} x$であることを確認しているのである．

Maxima コマンドの実行を含めて授業前学修を実行した学生にとって素直に納得できるものとなることをねらって，以上のように説明した．

5.6 maxima-online による授業前学修を踏まえたマクローリン近似指導の提案

5.4 の授業前学修を踏まえると，次のような指導例を提案することができる．

実は，上記の「解析学 I」と並行して，本学ではエンジニアリング系の学科においては「解析学 II」「解析学 II 演習」が開講されている．筆者はその科目の基礎力向上講座をも担当している．その受講者の全員が，上記の「解析学 I」の web 素材を学修しているわけではないが，5.4 の事例を踏まえて，「解析学 II」の基礎力向上講座で受講者に指導した事例である．

$$\sin x=s_0+s_1x+s_2x^2+s_3x^3+s_4x^4+\cdots$$
$$+s_nx^n+\cdots\quad (\text{a は任意の実数})$$

と展開できたとしよう．(「この前提は，素朴すぎるのだが，・・・『解析学Ⅲ』以降の講義で学ぶことになる.」とは話しておく.）

$x=0$ とし，$\sin 0=0=s_0$，よって，$s_0=0$

項別微分を素朴に認めて微分して，

$$\cos x=s_1+2s_2x+3s_3x^2+4s_4x^3+\cdots$$
$$+ns_nx^{n-1}+\cdots$$

$x=0$ とし，$\cos 0=1=s_1$，よって，$s_1=1$

さらに微分して，

$$-\sin x=2s_2+6s_3x+12s_4x^2+\cdots$$
$$+n(n-1)s_nx^{n-2}+\cdots$$

$x=0$ とし，$-\sin 0=0=2s_2$，よって，$s_2=0$

さらに微分して，

$$-\cos x=6s_3+24s_4x+\cdots$$
$$+n(n-1)(n-2)s_nx^{n-3}+\cdots$$

$x=0$ とし，$-\cos 0 = 1 = 6s_3$，よって，$s_3 = -\frac{1}{6}$

さらに微分して，

$$\sin x = 24s_4 + \cdots$$
$$+n(n-1)(n-2)(n-3)s_n x^{n-4} + \cdots$$

$x=0$ とし，$\sin 0 = 0 = 24s_4$，よって，$s_4 = 0$
以下同様にして，

$$s_5 = \frac{1}{5!}, s_6 = 0, s_7 = \frac{1}{7!}, s_8 = 0, s_9 = \frac{1}{9!}, \cdots$$

よって，

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \cdots$$

同様にすると，

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2$$
$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

（a は任意の実数）

最後の式で，$a = -1$ とすると，

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

項別積分も素朴に認めて両辺積分し，$x=0$のとき，両辺とも0となるように積分定数を0として，

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

以上のように公式を確認して，$f(x) = e^x \cos x$ の 3 次のマクローリン近似を次のように求める．

$$e^x \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \quad \text{(3 次)}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 \quad \text{(3 次)}$$

と公式によって確認し，

$$f(x) \approx (1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3)(1 - \frac{1}{2!}x^2)$$

（3 次）

とする．これを計算して 3 次のマクローリン近似を求める．そのときに，

$$\approx 1(\quad) + x(\quad) + x^2(\quad) + x^3(\quad) \quad \text{(3 次)}$$

とxの 3 次までを書いておいて，その後に係数を評価して（　）内に書き入れるのがポイントである．多項式近似という意味も明確になる．

$$\approx 1(1) + x(1) + x^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\approx 1 + x - \frac{1}{3}x^3$$

この計算が正しいかどうか，maxima-online で確認する．

```
g:exp(x);
h:cos(x);
f:g*h;
tg:taylor(g,x,0,3);
th:taylor(h,x,0,3);
tf:taylor(f,x,0,3);
```

e^xを g とする．
$\cos x$を h とする．
g*h を f とする．
g の$x=0$での 3 次までのテーラー展開を tg，
h の$x=0$での 3 次までのテーラー展開を th，
f の$x=0$での 3 次までのテーラー展開を tf とする．

これが，上記の maxima コマンドの意味である．
このように入力し，Calculate をクリックすると，図－１２のように出力される．

```
(%i1) g:exp(x);
                                               x
(%o1)                                        %e
(%i2) h:cos(x);
(%o2)                                       cos(x)
(%i3) f:g*h;
                                            x
(%o3)                                     %e  cos(x)
(%i4) tg:taylor(g,x,0,3);
                                             2    3
                                            x    x
(%o4)/T/                            1 + x + -- + -- + . . .
                                            2    6
(%i5) th:taylor(h,x,0,3);
                                             2
                                            x
(%o5)/T/                                1 - -- + . . .
                                            2
(%i6) tf:taylor(f,x,0,3);
                                                3
                                               x
(%o6)/T/                               1 + x - -- + . . .
                                               3
```

図－１２　maxima によるマクローリン近似

これで，上記の計算が正しかったことが確認できる．

なお，maxima-online の利用は，あくまで自力で行った計算の確認，計算間違いの箇所の発見，あるいは，課題のイメージの把握，課題解決の見通しの確認等にあることを，学生には繰り返し強調しておくのはいうまでもない．

6．まとめ

「2.3 授業前学修のための枠組み」で提案した

・講義内容を簡潔に web 素材として公開
（基本的な例題，解と Maxima のコマンド併記）
・授業までに提出する課題とその提出ツールも公開
・授業までの課題は授業中の課題の一環
・最初の授業で，web 素材と maxima-online を紹介

という枠組みは，本年度の試験運用の経過から，授業前学修を学生が取り組む場合に有効に機能することが実証できた．

授業において，プロジェクタの映像を瞬時に on-off できないため，授業前学修を踏まえた maxima-online の解説は授業開始直後に 1,2 例を行うのみであった．また，プロジェクタのアスペクト比が４：３に制限されるため，画面操作性の高いタブレットの活用は断念せざるを得ず，コマンド等の文字が学生にとって見えにくいという問題点もあった．

これ等の制約の結果として，授業前学修を踏まえて，授業において学生が能動的に maxima-online を活用して学習に取り組むという反転授業の段階まで進むにはまだまだハード面の制約が大きいと思われる．本学のラーニングコモンズにおいても，数人のグループに１台のタブレットを配当してアクティブラーニングを進めていくという環境にはない．

こうした制約の範囲内においても，学生を 1，2 名指名して，他の学生の前で板書したうえで要点を発表させるなど，反転授業に近づける工夫をしてきた．これらの取り組みをより有効に進めるための土台となるものが授業前学修にあることは明白である．本年度の試験運用を踏まえ，「枠組み」の一層の改善を図り，反転授業，アクティブラーニングの取り組みを着実に進めたい．

謝辞　本報告をまとめるにあたり，大阪工業大学教務部長の益山新樹教授，教職主任の野村良紀教授に有益な助言をいただきました．

参考文献

1) 中央教育審議会大学分科会大学教育部会，『予測困難な時代において生涯学び続け，主体的に考える力を育成する大学へ（審議まとめ）』，文部科学省, 2012,1頁.
2) 科学技術・学術審議会学術分科会学術情報委員会,『学修環境充実のための学術情報基盤の整備について（審議まとめ)』，文部科学省, 2013, 1~2 頁.
3) 重田勝介,「反転授業－ICT による教育改革の進展」,『情報管理』56 巻 10 号, 科学技術振興機構, 2014, 678~679 頁.
4) 同書,680~68
5) http://maxima-online.org/index.html.（閲覧日:2015 年 05 月 19 日）
6) 竹内薫,『はじめての数式処理ソフト』，講談社，2007，13~23 頁.
7) http://maxima-online.org/privacy.html.（2015/05/19 確認）
8) 赤間世紀,『Maxima で学ぶ微分積分』，工学社，2011.
9) 中川　義行,『Maxima 入門ノート 1.2.1』，http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf, 2005.（2015/05/19 確認）